Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт систем информатики
им. А. П. Ершова

Москалева Н. С.

ТЕОРЕТИКО-КАТЕГОРНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТРАССОВОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВРЕМЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Препринт
99

Новосибирск 2002

В данной работе исследуется временное расширение трассовой эквивалентности, дается ее теоретико-категорная характеризация и решается проблема разрешимости этого вида эквивалентности для подкласса конечных временных структур событий.

Данная работа выполнена при поддержке программы РАН "Научные проекты молодых ученых" (грант № 114) и ФЦП "Интеграция" ("Учебные научные центры").

Siberian Division of the Russian Academy of Sciences
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems

Moskalyova N. S.

THE CATEGORY THEORETICAL CHARACTERIZATION OF THE TRACE EQUIVALENCE FOR TIMED CONCURRENT MODELS

Preprint
99

Novosibirsk 2002

The timed extension of a trace equivalence is developed and is characterized on the category. The problem of decidability of this equivalence is solved in the setting of finite timed event structures.

This work is supported by by RAS Program "Projects of Young Scientists" under Grant 114 and RFP "Integracia" ("Educational scientific centers").

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятия эквивалентности между системами занимают центральное место в теории параллельного программирования. Наиболее известным и естественным из них является понятие трассовой эквивалентности [8]. Такая эквивалентность формулируется в терминах равенства трассовых языков систем. Как и все поведенческие эквивалентности, трассовая эквивалентность используется при спецификации и верификации параллельных/распределенных систем с целью сравнения их поведения, а также упрощения их структуры.

В конце двадцатого века резко возрос интерес к разработке распределенных систем, функционирующих в режиме реального времени. В результате в литературе появились временные варианты различных поведенческих эквивалентностей, что позволило изучать временные аспекты поведения систем.

В это же время, методы теории категорий [1] стали активно использоваться для изучения параллельных систем и процессов. Основная идея этой теории — формальное описание того факта, что одна система более выразительна, чем другая в терминах “вложений” или прообразов, то есть обратных отображений, при этом единицей считается изоморфизм. Категории обладают сохраняющими поведение морфизмами, которые рассматриваются как вид моделирования и называются открытыми морфизмами.

В рамках этой теории поведенческие эквивалентности могут быть представлены в терминах существования конструкции открытых морфизмов. Этот подход использовался в работах [10, 14] для характеризации бисимуляции и ее слабого и сильного вариантов, трассовой эквивалентности и сильной бисимуляционной эквивалентности с сохранением истории.

В статье [9] методами теории категорий была решена проблема разрешимости временной бисимуляции для временных интерливинговых моделей — временных систем переходов. Разрешимость временной интерливинговой бисимуляции в контексте временных моделей с семантикой ‘истинного’ параллелизма была показана в [12].

Цель данной работы состоит в разработке основы для построения временной интерливинговой трассовой эквивалентности и исследования ее разрешимости в контексте структур событий с непрерывным временем. Структуры событий [15] — одна из популярных моделей с семантикой “истинного” параллелизма. Основное достоинство структур событий состоит в том, что они позволяют естественным образом описывать и изучать базовые отношения (причинной зависимости, параллелизма и недетерминированного выбора) между событиями системы. Так как классические модели структур событий не учитывают временные аспекты системного поведения, то в литературе был рассмотрен ряд временных расширений этих моделей [11, 13, 12].

Материал статьи разбит на части следующим образом. В разд. 2 вводятся временные структуры событий и некоторые основные понятия и обозначения. В следующем разделе определяется категория временных структур событий, выделяется ее подкатегория, по которой строится понятие открытого морфизма и доказываются критерий открытости морфизма и некоторые свойства категории временных структур событий. Разд. 4 посвящен временной интерливинговой трассовой эквивалентности: вводится определение этой эквивалентности и приводится ее теоретико-категорная характеризация. В последнем разделе решается проблема разрешимости временной интерливинговой трассовой эквивалентности с помощью техники регионов Алура [3].

2. ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ СОБЫТИЙ

В этом разделе вводится модель временных структур событий, которая является расширением модели Винскеля [15] за счет введения временных функций, сопоставляющих каждому событию структуры самый ранний и самый поздний моменты глобального времени.

Сначала определим понятие структуры событий. Пусть Act — конечное множество действий.

Определение 1. ***Структура событий****, помеченная над* Act, *—это набор* $S = (E, \leq, \#, l)$, *где*

- E *— счетное множество событий,*
- $\leq\ \subseteq E \times E$ *— частичный порядок (отношение* ***причинной зависимости****), удовлетворяющий принципу* ***конечности причин:*** $\forall e \in E\ .\ \{e' \in E \mid e' \leq e\}$ *— конечное множество,*
- $\# \subseteq E \times E$ *— симметричное и иррефлексивное отношение (отношение* ***конфликта****), удовлетворяющее принципу* ***наследования конфликта:*** $\forall e, e', e'' \in E\ .\ e \# e' \leq e'' \ \Rightarrow\ e \# e''$,
- $l : E \to Act$ *— помечающая функция, сопоставляющая каждому событию из* E *действие из* Act.

Пусть $S = (E, \leq, \#, l)$ — структура событий. Отношение параллелизма $\smile$ между событиями из E определяется следующим образом: $\smile = (E \times E) \setminus (\leq \cup \leq \cup \#)$. Далее пусть $C \subseteq E$. Тогда C — *левозамкнутое*, если $\forall e, e' \in E \ . \ e \in C \ \wedge \ e' \leq e \Rightarrow e' \in C$; C — *бесконфликтное*, если $\forall e, \ e' \in C \ . \ \neg(e \ \# \ e')$; C — *конфигурация в* S, если C — левозамкнутое и бесконфликтное множество. Множество всех конфигураций в S обозначается через $\mathcal{C}(S)$. Для $C \in \mathcal{C}(S)$ определим множество $En(C) = \{e \in E \mid C \cup \{e\} \in \mathcal{C}(S)\}$.

Через $\mathbf{R}_0^+$ обозначим множество вещественных неотрицательных чисел.

Теперь введем понятие временной структуры событий.

Определение 2. ***Временная структура событий****, помеченная над Act, — это набор* $TS = (S, Eft, Lft)$*, где*

- $S = (E, \leq, \#, l)$ *— структура событий, помеченная над Act,*
- $Eft, \ Lft : E \to \mathbf{R}_0^+$ *— две временные функции, сопоставляющие каждому событию из* E *самое раннее и самое позднее мгновения выполнения события относительно глобального времени, соответственно. Кроме того, верно* $\forall e \in E. \ Eft(e) \leq Lft(e)$.

В графическом представлении временной структуры события изображаются вместе с сопоставленными им действиями и временными функциями; между парами событий, включенными в отношение причиной зависимости, рисуются стрелки (стрелки, относящиеся к парам, выводимым из свойства транзитивности, опускаются); между парами событий, включенными в отношение конфликта, рисуются символы $'\#'$ (символы, относящиеся к парам, выводимым из условия наследования конфликта, опускаются). Иногда, чтобы не загромождать рисунок, мы будем опускать события, указывая только соответствующие помечающие действия.

Пример 1. *Пример временной структуры событий приведен на рис. 1.*

Пусть $TS = (S = (E, \leq, \#, l), Eft, Lft)$ — временная структура событий и $e \in E$. Обозначим через $\Gamma(TS) = [E \to \mathbf{R}_0^+]$ множество функций, записывающих временные мгновения срабатывания для элементов из E. Для данной функции $\nu \in \Gamma(TS)$ положим, что

$$\Delta(\nu) = \max\{\nu(e) \mid e \in E\}.$$

Состоянием в TS будем называть пару (C, ν), где $C \in \mathcal{C}(S)$ и $\nu \in \Gamma(TS)$. Начальное состояние в TS (обозначается через (C_{TS}, ν_{TS})) — это пара $(\emptyset, 0)$.

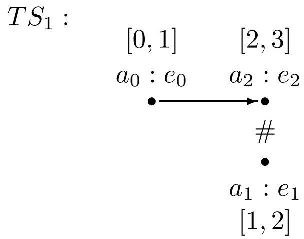


Рис. 1

Выполнение временной структуры событий представляется последовательностью переходов из состояния в состояние. Переход из одного состояния в другое осуществляется посредством выполнения события после прохождения некоторого интервала глобального времени.

В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные понятия и обозначения. Пусть $(C, \nu), (C', \nu')$ — состояния TS; $ST(TS)$ — множество всех состояний TS. В состоянии (C, ν) событие e может выполниться после прохождения времени $d \in \mathbf{R}_0^+$ и *привести к* состоянию (C', ν') (обозначается следующим образом: $(C, \nu) \stackrel{(e,d)}{\longrightarrow} (C', \nu')$), если $C' = C \cup \{e\}$, $\nu' \mid_{E \setminus \{e\}} = \nu$, $\nu'(e) = \Delta(\nu) + d$ и $Eft(e) \leq \nu'(e) \leq \min\{Lft(e') \mid e' \in En(C)\}$.

Мы будем писать $(C, \nu) \stackrel{(a,d)}{\longrightarrow} (C', \nu')$, если $(C, \nu) \stackrel{(e,d)}{\longrightarrow} (C', \nu')$ и $l(e) = a$. *Последовательность выполнения* r временного слова $w = (a_1, d_1)(a_2, d_2) \ldots (a_n, d_n)$ — это конечная последовательность вида:

$$(\emptyset, 0) \stackrel{(a_1,d_1)}{\longrightarrow} (C_1, \nu_1) \stackrel{(a_2,d_2)}{\longrightarrow} (C_2, \nu_2) \ldots \stackrel{(a_n,d_n)}{\longrightarrow} (C_n, \nu_n).$$

Временное слово алфавита Act над $\mathbf{R}_0^+$ это конечная последовательность пар $w = (a_1, d_1)(a_2, d_2) \ldots (a_n, d_n)$, где для любого $1 \leq i \leq n$ $a_i \in Act$ и $d_i \in \mathbf{R}_0^+$. Множество всех временных слов обозначим через $(Act \times \mathbf{R}_0^+)^*$.

Обобщим отношение перехода из состояния (C, ν) в состояние (C', ν') на временные слова из $(Act \times \mathbf{R}_0^+)^*$ следующим образом. Пусть $d \in \mathbf{R}_0^+$, $a \in Act$ и $w = (a_1, d_1) \cdots (a_n, d_n) \in (Act \times \mathbf{R}_0^+)^*$. Тогда

$$(C, \nu) \stackrel{\epsilon}{\rightarrow} (C, \nu) \text{ и } (C, \nu) \stackrel{w}{\rightarrow} \stackrel{(a,d)}{\rightarrow} (C', \nu') \ \Leftrightarrow \ (C, \nu) \stackrel{w.(a,d)}{\longrightarrow} (C', \nu').$$

Множество $L(TS) = \{w \in (Act \times \mathbf{R}_{\mathbf{0}}^{+})^* \mid (C_S, \nu_{TS}) \xrightarrow{w}\}$ будем называть *языком* временной структуры событий TS. Например, для временной структуры событий TS_1, изображенной на рис. 1, языком будет являться следующее множество:

$$\begin{aligned} L(TS_1) = \quad & \{\epsilon, (a_0, d_1), (a_1, 1), (a_1, 1)(a_0, 0), (a_0, d_1)(a_1, d_2), (a_0, d_1)(a_2, d_3) \mid \\ & 0 \le d_1 \le 1, 1 \le d_1 + d_2 \le 2, d_1 + d_3 = 2\}. \end{aligned}$$

Состояние $(C, \nu) \in ST(TS)$ будем называть *достижимым*, если $(C, \nu) = (C_S, \nu_{TS})$ или существует достижимое состояние $(C', \nu') \in ST(TS)$ и временное действие (a, d) такие, что $(C', \nu') \xrightarrow{(a,d)} (C, \nu)$. Множество всех достижимых состояний обозначим через $RS(TS)$.

3. КАТЕГОРИЯ ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР СОБЫТИЙ

В этом разделе определяется категория временных структур событий, выделяется ее подкатегория, состоящая из временных структур событий, соответствующих временным словам, по этой подкатегории определяется понятие открытого морфизма и приводятся критерий открытости и некоторые свойства морфизмов.

Для начала введем понятие морфизма между временными структурами событий.

Определение 3. *Пусть TS, TS' — временные структуры событий.* ***Морфизмом*** $\mu : TS \to TS'$ *назовем однозначное отображение $\mu : E \to E'$, если выполнено следующее:*

- $l' \circ \mu = l$;
- $C \in \mathcal{C}(S) \ \Rightarrow \ \mu\ C \in \mathcal{C}(S')$; *кроме того верно:*
  - $\forall e,\ e' \in C.\ \mu(e) \ = \ \mu(e') \ \Rightarrow \ e \ = \ e'$,
  - $\forall e \in C.\ Eft'(\mu(e)) \le Eft(e)$,
  - $\min\{Lft(e) \mid e \in En(C)\} \ \le \min\{Lft'(e) \mid e \in En(\mu\ C)\}$.

При этом здесь и далее считаем, что минимум по пустому множеству равен $-\infty$.

Пример 2. *Отображение $\mu : TS_2 \to TS_1$, определенное по правилу $\mu(e_i') = e_i$, является морфизмом между временными структурами событий TS_1 и TS_2, изображенных на рис. 1 и рис. 2 соответственно.*

Теперь определим категорию временных структур событий.

TS_2 :

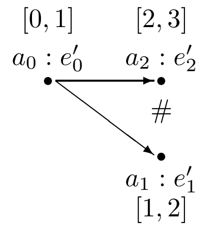


Рис. 2

Определение 4. *Множество временных структур событий и морфизмы между ними образуют категорию временных структур событий $\mathcal{CTS}_{Act}$. При этом тождественный морфизм это тождественное отображение, а композиция морфизмов определена как обычная композиция отображений.*

Проверим корректность данного определения.

Утверждение 1. $\mathcal{CTS}_{Act}$ *— категория.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения необходимо проверить, что тождественное отображение и композиция морфизмов являются морфизмами. Первое очевидно, проверим второе. Пусть TS, TS', TS'' — временные структуры событий. Далее, пусть $\mu_1 : TS \to TS'$ и $\mu_2 : TS' \to TS''$ — морфизмы. Тогда проверим, что отображение $\mu_2 \circ \mu_1$ также является морфизмом.

- $l'' \circ \mu_2 \circ \mu_1 = l' \circ \mu_1 = l$;
- $C \in \mathcal{C}(S) \;\Rightarrow\; \mu_1\ C \in \mathcal{C}(S') \;\Rightarrow\; \mu_2 \circ \mu_1\ C \in \mathcal{C}(S'')$; кроме того верно:
  - $\forall e,\ e' \in C.\ \mu_2 \circ \mu_1(e) = \mu_2 \circ \mu_1(e') \Rightarrow \mu_1(e) = \mu_1(e') \Rightarrow e = e'$,
  - $\forall e \in C.\ Eft''(\mu_2 \circ \mu_1(e)) \leq Eft'(\mu_1(e)) \leq Eft(e)$,
  - $\min\{Lft(e) \mid e \in En(C)\} \leq \min\{Lft'(e) \mid e \in En(\mu_1\ C)\} \leq \min\{Lft''(e) \mid e \in En(\mu_2 \circ \mu_1\ C)\}$.

Таким образом, композиция морфизмом действительно является морфизмом. □

Далее рассмотрим и докажем некоторое свойство морфизма в определенной выше категории $\mathcal{CTS}_{Act}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mu : TS \to TS'$ *— морфизм и* $(a_1, d_1) \ldots (a_n, d_n)$ *—*

временное слово. Если

$$(C_S, \nu_{TS}) = (C_0, \nu_0) \stackrel{(a_1,d_1)}{\rightarrow} (C_1, \nu_1) \dots (C_{n-1}, \nu_{n-1}) \stackrel{(a_n,d_n)}{\rightarrow} (C_n, \nu_n)$$

является последовательностью выполнения в TS, то

$$(C_{S'}, \nu_{TS'}) = (\mu\, C_0, \nu'_0) \stackrel{(a_1,d_1)}{\rightarrow} (\mu\, C_1, \nu'_1) \dots (\mu\, C_{n-1}, \nu'_{n-1}) \stackrel{(a_n,d_n)}{\rightarrow} (\mu\, C_n, \nu'_n)$$

— последовательность выполнения в TS'.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n.
$n = 0$. Очевидно.
$n > 0$. Пусть

$$(C_S, \nu_{TS}) = (C_0, \nu_0) \stackrel{(a_1,d_1)}{\rightarrow} (C_1, \nu_1) \dots (C_{n-1}, \nu_{n-1}) \stackrel{(a_n,d_n)}{\rightarrow} (C_n, \nu_n)$$

последовательность выполнения в TS. Тогда по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned}(C_{S'}, \nu_{TS'}) = \quad & (\mu\ C_0, \nu'_0) \xrightarrow{(a_1,d_1)} (\mu\ C_1, \nu'_1) \dots \\ & (\mu\ C_{n-2}, \nu'_{n-2}) \xrightarrow{(a_{n-1},d_{n-1})} (\mu\ C_{n-1}, \nu'_{n-1})\end{aligned}$$

— последовательность выполнения в TS'. По определению отношения $\stackrel{(a_n,d_n)}{\rightarrow}$ верно:

$$\begin{aligned}& l(e_n) = a_n, \\ & C_n = C_{n-1} \cup \{e_n\}, \\ & \nu_n\ |_{E \setminus \{e_n\}} = \nu_{n-1}, \\ & \nu_n(e_n) = \Delta(\nu_{n-1}) + d_n, \\ & Eft(e_n) \le \nu_n(e_n)\ \le\ \min\{Lft(e) \mid e \in En(C_{n-1})\}.\end{aligned}$$

В силу определения морфизма имеем: $\mu\ C_{n-1},\ \mu\ C_n \in \mathcal{C}(S')$. Покажем, что $\mu\, C_n \setminus \mu\, C_{n-1} = \mu(e_n)$. Предположим противное, то есть $\mu(e_n) \in \mu\ C_{n-1}$. Тогда существует событие $e' \in C_{n-1}$ такое, что $\mu(e') = \mu(e_n)$, а значит, по определению морфизма имеем $e' = e_n$, что невозможно, так как $e_n \notin C_{n-1}$. Таким образом, верно $\mu(e_n) \notin \mu\, C_{n-1}$ и $\mu\, C_n \setminus \mu\, C_{n-1} = \mu(e_n)$. Далее, так как μ — морфизм, то

$$\begin{aligned}& l'(\mu(e_n)) = l(e_n) = a_n, \\ & \min\{Lft'(e) \mid e \in En(\mu\ C_{n-1})\} && \ge \min\{Lft(e) \mid e \in En(C_{n-1})\} \\ & && \ge \nu_n(e_n)\ =\ \Delta(\nu'_{n-1}) + d_n \\ & && \ge Eft(e_n)\ \ge Eft'(\mu(e_n)).\end{aligned}$$

Тогда $(\mu\ C_{n-1}, \nu'_{n-1}) \stackrel{(a_n,d_n)}{\longrightarrow} (\mu\ C_n, \nu'_n)$, где $\nu'_n\ |_{E'\setminus\{\mu(e_n)\}} = \nu'_{n-1}$, $\nu'_n(\mu(e_n)) = \Delta(\nu'_{n-1}) + d_n$, что и требовалось доказать.

$\square$

Выделим подкатегорию категории $\mathcal{CTS}_{Act}$, соответствующую временным словам алфавита Act над $\mathbf{R}_0^+$. Для начала по временным словам $w \in (Act \times \mathbf{R}_0^+)^*$ будем строить временные структуры событий TS_w так, что последние будут составлять подкатегорию в категории временных структур событий.

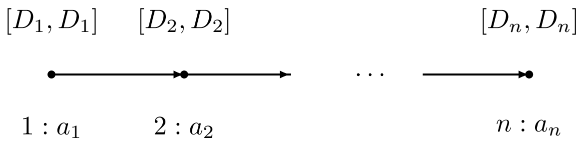
Определение 5. *Пусть $w = (a_1, d_1)(a_2, d_2)\cdots(a_n, d_n)$ — временное слово. Определим временную структуру событий*

$$TS_w = (E, \leq, \#, l, Eft, Lft),$$

следующим образом:

- $E = \{1, 2, \cdots, n\}$,
- $\leq\ = \{(i, j) \in E \times E \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$,
- $\# = \emptyset$,
- $l(i) = a_i,\ i = 1, 2 \cdots n$,
- $Eft(i) = Lft(i) = d_1 + \ldots + d_i = D_i$,

то есть:



Теперь определим подкатегорию в определенной выше категории временных структур событий и покажем, что она соответствует категории временных слов. Всё это выражается в следующих результатах.

Утверждение 2. *Построенные временные структуры событий TS_w по временным словам $w \in (Act \times \mathbf{R}_0^+)^*$ способом, указанным выше, тождественные морфизмы и морфизмы с пустой областью определения образуют подкатегорию в категории $\mathcal{CTS}_{Act}$.*

Доказательство. Очевидно, так как если между двумя структурами событий существует тождественный морфизм или морфизм с пустой областью определения, то этот морфизм единственный. $\square$

Теорема 2. *Пусть TS — временная структура событий и $w = (a_1, d_1) \dots (a_n, d_n)$ — временное слово. Тогда любой последовательности выполнения в TS вида*

$$(C_S, \nu_{TS}) = (C_0, \nu_0) \stackrel{(a_1,d_1)}{\rightarrow} (C_1, \nu_1) \dots (C_{n-1}, \nu_{n-1}) \stackrel{(a_n,d_n)}{\rightarrow} (C_n, \nu_n)$$

можно сопоставить морфизм $\mu : TS_w \to TS$ такой, что $\mu(i) = e_i$, $\{e_i\} = C_i \setminus C_{i-1}$. Кроме того, данное сопоставление есть биекция.

Доказательство. Проверка того, что отображение μ является морфизмом очевидна. Чтобы показать биективность данного сопоставления, построим обратное сопоставление. Пусть $\mu' : TS_w \to TS$ — морфизм. Тогда временному слову w в TS соответствует последовательность выполнения вида

$$(C_S, \nu_{TS}) = (C_0, \nu_0) \stackrel{(a_1,d_1)}{\rightarrow} (C_1, \nu_1) \dots (C_{n-1}, \nu_{n-1}) \stackrel{(a_n,d_n)}{\rightarrow} (C_n, \nu_n),$$

где $C_i = \mu'(\{1, \cdots, i\})$ $(i = 1 \cdots n)$. Отсюда видно, что данное сопоставление действительно биективно. □

Определим хорошо известное теоретико-категорное понятие открытого морфизма в соответствии с выделенной подкатегорией временных слов.

Определение 6. *Морфизм $\mu : TS \to TS'$ в категории $\mathcal{CTS}_{Act}$ называется* **открытым**, *если для любого временного слова w и морфизма $\mu' : TS_w \to TS'$ существует морфизм $p : TS_w \to TS$ такой, что $\mu \circ p = \mu'$.*

Ниже приведен критерий открытости морфизма.

Теорема 3. *Морфизм $\mu : TS_1 \to TS_2$ открыт тогда и только тогда, когда для любого достижимого посредством временного слова w состояния (C_2, ν_2) в TS_2 существует достижимое посредством временного слова w состояние (C_1, ν_1) в TS_1 и при этом $\mu\ C_1 = C_2$.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Предположим, что $(C_{S_2}, \nu_{TS_2}) \stackrel{w}{\rightarrow} (C_2, \nu_2)$ в TS_2. Тогда по утверждению 2 и теореме 2 существует морфизм $\mu' : TS_w \to TS_2$. Так как морфизм μ открыт, то существует морфизм $p : TS_w \to TS_1$ такой, что $\mu \circ p = \mu'$. Теперь по теореме 2 для временного слова w в TS_1 существует последовательность выполнения $(C_{S_1}, \nu_{TS_1}) \stackrel{w}{\rightarrow} (C_1, \nu_1)$ в TS_1. Кроме того, верно, что $\mu\ C_1 = C_2$ в силу коммутативности морфизмов.

($\Leftarrow$) Пусть для любого достижимого посредством временного слова w состояния (C_2, ν_2) в TS_2 существует достижимое посредством временного слова w состояние (C_1, ν_1) в TS_1 и при этом $\mu\ C_1 = C_2$. Покажем, что морфизм μ открыт. Пусть $\mu' : TS_w \to TS_2$. Тогда по теореме 2 для временного слова w существует последовательность $(C_{S_2}, \nu_{TS_2}) \stackrel{w}{\to} (C_2, \nu_2)$ в TS_2. Тогда по условию теоремы следует, что $(C_{S_1}, \nu_{TS_1}) \stackrel{w}{\to} (C_1, \nu_1)$ и $\mu\ C_1 = C_2$. Пользуясь теоремой 2, убеждаемся в существовании морфизма $p : TS_w \to TS_1$, при этом необходимая коммутативность следует из равенства $\mu\ C_1 = C_2$. Таким образом, морфизм μ открыт. $\square$

Пример 3. *Морфизм μ из временной структуры событий TS_2, представленной на рис. 2, во временную структуру событий TS_1, изображенную на рис. 1, определенный по правилу $\mu(e'_i) = e_i$, не является открытым морфизмом, так как для достижимого состояния $(\{e_1\}, 1)$ в TS_1 такого, что $(C_{S_1}, \nu_{TS_1}) \stackrel{(a_1,1)}{\to} (\{e_1\}, 1)$, в TS_2 не существует состояния, достижимого посредством этого же временного слова.*

Теперь докажем некоторое свойство открытых морфизмов в категории $\mathcal{CTS}_{Act}$, которое будет необходимо в дальнейшем.

Теорема 4. *Пусть $\mu_1 : TS_1 \to TS$, $\mu_2 : TS_2 \to TS$ — открытые морфизмы. Тогда существуют временная структура событий TS_x и открытые морфизмы $\mu'_1 : TS_x \to TS_1$, $\mu'_2 : TS_x \to TS_2$ такие, что следующая диаграмма коммутативна.*

$$\begin{tikzcd} TS_1 \arrow[r, "\mu_1"] & TS \\ TS_x \arrow[u, "\mu'_1"] \arrow[r, "\mu'_2"'] & TS_2 \arrow[u, "\mu_2"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Построим временную структуру событий TS_x. Пусть $TS_x = (S_x, Eft_x, Lft_x)$, где

- $S_x = +\ (S_{C_1 \times C_2} \mid C_i \in \mathcal{C}(S_i),\ \exists C \in \mathcal{C}(S).\ C = \mu_i\ C_i\ (i = 1, 2))$, при этом $S_{C_1 \times C_2} = (E_{C_1 \times C_2},\ \leq_{C_1 \times C_2},\ \#_{C_1 \times C_2},\ l_{C_1 \times C_2})$ определена следующим образом:
  - $E_{C_1 \times C_2} = \{(e_1, e_2) \in C_1 \times C_2 \mid \mu_1(e_1) = \mu_2(e_2)\}$,
  - $(e_1, e_2) \leq_{C_1 \times C_2} (e'_1, e'_2) \Leftrightarrow e_i \leq_i e'_i$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$,
  - $\#_{C_1 \times C_2} = \emptyset$,

– $l_{C_1 \times C_2}((e_1, e_2)) = l_1(e_1)$ $(= l_2(e_2))$;

- $Eft_x(e_1, e_2) = \max\{Eft_1(e_1), Eft_2(e_2)\}$;
- $Lft_x(e_1, e_2) = \min\{Lft_1(e_1), Lft_2(e_2)\}$.

По построению видно, что TS_x действительно является временной структурой событий.

Теперь определим отображения μ'_1 и μ'_2 следующим образом: $\mu'_i(e_1, e_2) = e_i$ $(i = 1, 2)$. Проверка того, что μ'_1 и μ'_2 являются морфизмами очевидна. Из определения морфизмов и построения TS_x, немедленно следует, что $\mu_1 \circ \mu'_1 = \mu_2 \circ \mu'_2$, то есть упомянутая выше диаграмма коммутативна.

В заключение осталось проверить открытость μ'_1 (проверка открытости μ'_2 абсолютна аналогична). Предположим, что $(C_{S_1}, \nu_{TS_1}) \xrightarrow{w} (C_1, \nu_1)$ в TS_1. Используя теорему 1, получаем следующую последовательность выполнения $(\mu_1\ C_{S_1}, \nu_{TS}) \xrightarrow{w} (\mu_1\ C_1, \nu)$ в TS. Тогда, воспользовавшись открытостью морфизма μ_2, получаем: $(C_{S_2}, \nu_{TS_2}) \xrightarrow{w} (C_2, \nu_2)$ в TS и $\mu_2\ C_2 = \mu_1\ C_1$. Положим, что $C_x = \{(e_1, e_2) \in C_1 \times C_2 \mid \mu_1(e_1) = \mu_2(e_2)\}$. Тогда из построения TS_x, следует, что $(C_{S_x}, \nu_{TS_x}) \xrightarrow{w} (C_x, \nu_x)$. По определению морфизма получаем: $\mu'_1\ C_x = C_1$. Следовательно, μ'_1 действительно является открытым морфизмом, в силу теоремы 3. $\square$

4. ВРЕМЕННАЯ ИНТЕРЛИВИНГОВАЯ ТРАССОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

В этом разделе определяется временная интерливинговая трассовая эквивалентность (TIT-эквивалентность), а также приводится ее теоретико-категорная характеризация в терминах существования симметричной конструкции открытых морфизмов.

Сформулируем классическое определение TIT-эквивалентности.

Определение 7. *Две временные структуры событий TS_1, TS_2 называются TIT-**эквивалентными** (обозначается $TS_1 \approx_{tit} TS_2$) тогда и только тогда, когда их языки совпадают, то есть $L(TS_1) = L(TS_2)$.*

Пример 4. *Например, временные структуры событий TS_3 и TS_4, изображенные на рис. 3, TIT-эквивалентны, так как их языки совпадают. Однако временные структуры событий TS_5 и TS_6, графически представленные на рис. 4, не являются TIT-эквивалентными, так как временное слово $(a, 2)$ принадлежит $L(TS_6)$, но не принадлежит $L(TS_5)$.*

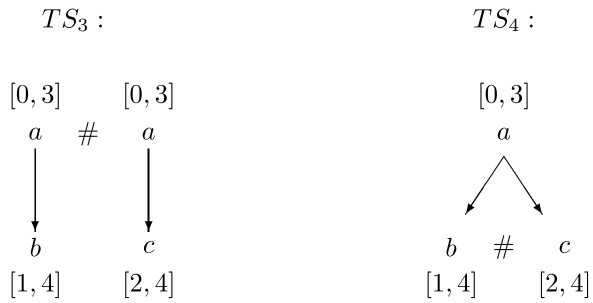


Рис. 3

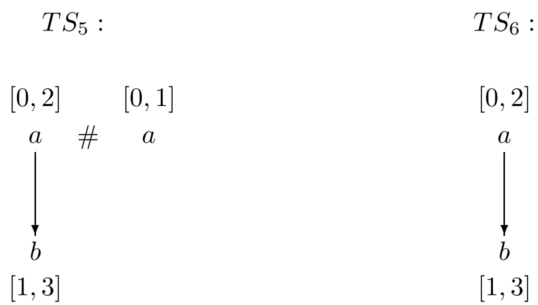


Рис. 4

Теперь определим вспомогательное понятие подобия по временным словам, используя понятие открытого морфизма, которое было введено в предыдущем разделе.

Определение 8. *Две временные структуры событий TS_1 и TS_2 в категории $\mathcal{CTS}_{Act}$ называются подобными по временным словам (обозначается $TS_1 \sim_{tw} TS_2$), если существует следующая конструкция открытых морфизмов с вершиной TS*

$$TS_1 \xleftarrow{\mu_1} TS \xrightarrow{\mu_2} TS_2.$$

Приступим к доказательству корректности данного определения.

Утверждение 3. *Определенное выше подобие по временным словам является эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть TS_1, TS_2, TS_3 — временные структуры событий. Необходимо проверить следующие утверждения:

1. $TS_1 \sim_{tw} TS_1$.
   Это верно в силу того, что тождественный морфизм открыт.
2. Если $TS_1 \sim_{tw} TS_2$, то $TS_2 \sim_{tw} TS_1$.
   Верно в силу определения.
3. Если $TS_1 \sim_{tw} TS_2$ и $TS_2 \sim_{tw} TS_3$, то $TS_1 \sim_{tw} TS_3$.
   Это следует из теоремы 4 с учетом того, что композиция открытых морфизмов также является открытым морфизмом.

$\square$

Докажем совпадение TIT-эквивалентности и введенного подобия по временным словам.

Теорема 5. $TS_1 \sim_{tw} TS_2 \Longleftrightarrow TS_1 \approx_{tit} TS_2$.

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Пусть $TS_1 \xleftarrow{\mu_1} TS \xrightarrow{\mu_2} TS_2$ — конструкция открытых морфизмов. Проверим совпадение языков данных структур событий. Для начала установим, что $L(TS) = L(TS_1)$. Для этого покажем справедливость двух включений.

- $L(TS) \subseteq L(TS_1)$. Пусть $w \in L(TS)$, тогда по теореме 1 $w \in L(TS_1)$.
- $L(TS_1) \subseteq L(TS)$. Пусть $w \in L(TS_1)$, тогда по теореме 3, используя открытость морфизма μ_1, получаем, что $w \in L(TS)$.

Аналогичным образом выводим, что $L(TS) = L(TS_2)$, а отсюда получаем, что $TS_1 \approx_{tit} TS_2$.

($\Longleftarrow$) Пусть TS_1 и TS_2 TIT-эквивалентны. Введем следующее обозначение $L = L(TS_1) = L(TS_2)$. Построим конструкцию открытых отображений с вершиной TS, которую определим следующим образом. $TS = (S, Eft, Lft)$, где

- $S = +\ (S_{C_1 \times C_2} \mid C_i \in \mathcal{C}(S_i), i = 1,2\ \exists w \in L.\ (C_{S_i}, \nu_{TS_i}) \xrightarrow{w} (C_i, \nu_i)$, $i = 1,2)$, при этом
  - $E_{C_1 \times C_2} = \{(e_1, e_2) \in C_1 \times C_2 \mid \exists C_i',\ C_i'' \subseteq C_i.\ (C_{S_i}, \nu_{TS_i}) \xrightarrow{w'} (C_i', \nu_i') \xrightarrow{(e_i,d)} (C_i'', \nu_i''),\ i = 1,2,\ l_1(e_1) = l_2(e_2)\}$,
  - $(e_1, e_2) \leq_{C_1 \times C_2} (e_1', e_2') \Leftrightarrow e_i \leq_i e_i'$ для некоторого $i \in \{1,2\}$,
  - $\#_{C_1 \times C_2} = \emptyset$,
  - $l_{C_1 \times C_2}((e_1, e_2)) = l_1(e_1) = l_2(e_2)$;
- $Eft(e_1, e_2) = \max\{Eft_1(e_1),\ Eft_2(e_2)\}$;
- $Lft(e_1, e_2) = \min\{Lft_1(e_1),\ Lft_2(e_2)\}$.

Из построения видно, что TS является временной структурой событий.

Далее определим отображения $\mu_i : TS \to TS_i$ по следующему закону: $\mu_i((e_1, e_2)) = e_i (i = 1, 2)$. По построению TS получаем, что μ_1 и μ_2 действительно являются морфизмами.

Осталось удостовериться в открытости этих морфизмов. Проверим этот факт для μ_1 (открытость μ_2 доказывается абсолютно аналогично). Пусть $(C_{S_1}, \nu_{TS_1}) \xrightarrow{w} (C_1, \nu_1)$ в TS_1. Поскольку $L(TS_1) = L(TS_2)$, то в TS_2 существует достижимое состояние (C_2, ν_2) такое, что $(C_{S_2}, \nu_{TS_2}) \xrightarrow{w} (C_2, \nu_2)$ в TS_2. Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} C = \{(e_1, e_2) \in C_1 \times C_2 \mid \quad & \exists C'_i,\ C''_i \subseteq C_i.\ (C_{S_i}, \nu_{TS_i}) \xrightarrow{w'} (C'_i, \nu'_i) \xrightarrow{(e_i, d)} (C''_i, \nu''_i), \\ & i = 1, 2, l_1(e_1) = l_2(e_2)\}. \end{aligned}$$

Из построения TS, следует, что C — конфигурация в S. Вновь, по построению TS, получаем $(C_S, \nu_{TS}) \xrightarrow{w} (C, \nu)$ в TS и $\mu_1\ C = C_1$. Таким образом, μ_1 является открытым морфизмом в силу теоремы 3. □

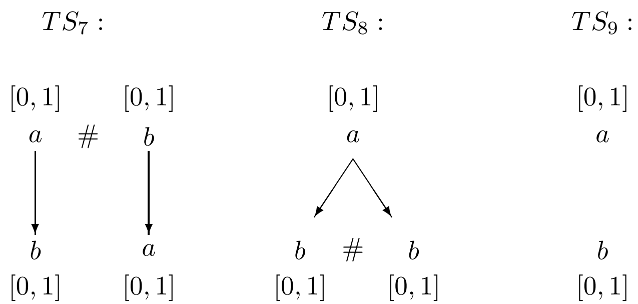


Рис. 5

Пример 5. *Для временных структур событий TS_7, TS_8 и TS_9, изображенных на рис. 5 верно следующее. TS_7 и TS_9 являются подобными по временным словам (а значит и TIT-эквивалентными), в то время как временные структуры событий TS_7 и TS_8 не являются таковыми, так как $(b, d) \in L(TS_7)$, но $(b, d) \notin L(TS_8)$ $(d \in [0, 1])$.*

5. РАЗРЕШИМОСТЬ

В этом разделе ограничимся рассмотрением конечных временных структур событий, тех, у которых множество событий конечно, и кроме того, временные функции принимают только целые значения. Подкласс таких структур обозначим через $\mathcal{TS}_{\mathbf{N}}$.

Как и большинство уже известных результатов разрешимости для моделей реального времени, построим процедуру разрешимости, основанную на понятии региона (класса эквивалентности состояний). Этот метод обеспечивает конечность представления пространства состояний.

В начале определим понятие региона.

Определение 9. *Пусть TS — временная структура событий и $\nu, \nu' \in \Gamma(TS)$, тогда $\nu \simeq \nu'$ в том и только том случае, когда*
(а) для каждого $e \in E$ выполнено: $\lfloor \nu(e) \rfloor = \lfloor \nu'(e) \rfloor$,
(б) для любых $e, e' \in E$ верно: $\wr\nu(e)\wr \le \wr\nu(e')\wr \Leftrightarrow \wr\nu'(e)\wr \le \wr\nu'(e')\wr$, и $\wr\nu(e)\wr = 0 \Leftrightarrow \wr\nu'(e)\wr = 0$.
Здесь, для $d \in \mathbf{R}_0^+$ $\wr d\wr$ и $\lfloor d \rfloor$ обозначают дробную и наименьшую целую части соответственно. **Регионом** *будем называть класс эквивалентных функций. Для $\nu \in \Gamma(TS)$ обозначим через $[\nu]$ регион, содержащий ν.*

Пусть $TS \in \mathcal{TS}_{\mathbf{N}}$. *Расширенное состояние* в TS определим как пару $(C, [\nu])$, где $(C, \nu) \in RS(TS)$. Пару $(C_S, [\overline{0}])$ будем называть *начальным расширенным состоянием* TS.

Докажем некоторое утверждение, которое будет полезно в дальнейшей работе.

Утверждение 4. *Пусть $TS \in \mathcal{TS}_{\mathbf{N}}$.*
(а) Для события e и региона $[\nu]$ верно:
$Eft(e) \le \nu(e) \le Lft(e) \;\Rightarrow\; \forall \nu_1 \in [\nu]. Eft(e) \le \nu_1(e) \le Lft(e)$.
(б) Для расширенных состояний $(C, [\nu]), (C', [\nu'])$ справедливо:
$(C, \nu) \overset{(a,d)}{\rightarrow} (C', \nu') \Rightarrow \forall \nu_1 \in [\nu].(C, \nu_1) \xrightarrow{(a,d')} (C', \nu_1')$ *для некоторых $\nu_1' \in [\nu']$ и $d' \in \mathbf{R}_0^+$.*

Доказательство.
(а) Пусть $Eft(e) \le \nu(e) \le Lft(e)$ и $\nu_1 \in [\nu]$. Проверим, что

$$Eft(e) \le \nu_1(e) \le Lft(e).$$

Так как $Eft(e),\ Lft(e) \in \mathbf{N}$, то верно следующее:

$$Eft(e) \le \lfloor \nu(e) \rfloor \;=\; \lfloor \nu_1(e) \rfloor \;<\; \lfloor \nu(e) \rfloor + 1 \;=\; \lfloor \nu_1(e) \rfloor + 1 \le Lft(e).$$

А значит $Eft(e) \le \nu_1(e) \le Lft(e)$.

(б) Пусть $(C,[\nu]),(C',[\nu'])$ — расширенные состояния и $(C,\nu) \stackrel{(a,d)}{\longrightarrow} (C',\nu')$. Выберем $\nu_1 \in [\nu]$. По определению отношения $\stackrel{(a,d)}{\longrightarrow}$ имеем:

$$\begin{array}{l} l(e)=a, \\ C'=C\cup\{e\}, \\ Eft(e)\le\Delta(\nu)+d\le\min\{Lft(e)\mid e\in En(C)\}. \end{array}$$

Возможны две ситуации:

— $\Delta(\nu_1) \le \Delta(\nu)$. Тогда определим d' как $d+\Delta(\nu)-\Delta(\nu_1)$. Используя первый пункт доказываемой теоремы, получаем

$$Eft(e)\le\Delta(\nu)+d=\Delta(\nu_1)+d'\le\min\{Lft(e)\mid e\in En(C)\}.$$

Тогда заключаем, что $(C,\nu_1) \stackrel{(a,d')}{\to} (C',\nu_1')$, и $\nu_1' \in [\nu']$.

— $\Delta(\nu) < \Delta(\nu_1)$. В силу определения региона имеем, что если $d < \Delta(\nu_1) - \Delta(\nu)$, то $[\nu]=[\nu']$, и по первому пункту верно $(C,\nu_1) \stackrel{(a,0)}{\to} (C',\nu_1')$. Теперь предположим, что $d \ge \Delta(\nu_1)-\Delta(\nu)$. Тогда определим $d'=d-\Delta(\nu_1)+\Delta(\nu)$. Вновь по первому пункту имеем

$$Eft(e)\le\Delta(\nu)+d=\Delta(\nu_1)+d'\le\min\{Lft(e)\mid e\in En(C)\}.$$

Отсюда получаем, что $(C,\nu_1) \stackrel{(a,d')}{\to} (C',\nu_1')$ и $\nu_1' \in [\nu']$.

Таким образом данное утверждение доказано. □

Введем некоторые полезные обозначения. Запись $(C,[\nu]) \stackrel{(a,d)}{\longrightarrow} (C',[\nu'])$ означает, что $(C,\nu) \stackrel{(a,d)}{\longrightarrow} (C',\nu')$. Расширенное состояние $(C,[\nu])$ называется достижимым, если (C,ν) достижимо посредством некоторого временного слова w. Теперь переформулируем критерий открытости морфизмов, с учетом введенных понятий.

Теорема 6. *Морфизм $\mu : TS_1 \to TS_2$ открыт тогда и только тогда, когда для любого достижимого посредством временного слова w расширенного состояния $(C_2,[\nu_2])$ в TS_2 существует достижимое посредством временного слова w расширенное состояние $(C_1,[\nu_1])$ в TS_1 и при этом $\mu\ C_1' = C_2'$.*

Доказательство. Следует из теоремы 3 и утверждения 4. □

Следствие 1. *Для класса $\mathcal{CTS}_{\mathbf{N}}$ открытость морфизма разрешима.*

Доказательство. Следует из теоремы 6 и утверждения 4, так как число достижимых расширенных состояний не превышает $N \cdot 2^{2N} \cdot (C+1)^N$, где $N = |E_1| * |E_2|$ ($|E_i|$ — число событий для TS_i,$(i = 1, 2)$), а C — наибольшее натуральное число, упоминаемое в определении временных функций. $\square$

Теорема 7. *Пусть $TS_1, TS_2 \in \mathcal{TS}_{\mathbf{N}}$. Тогда если существует конструкция открытых морфизмов вида: $TS_1 \xleftarrow{\mu_1} TS \xrightarrow{\mu_2} TS_2$, то существует конструкция открытых морфизмов $TS_1 \xleftarrow{\mu_1'} TS' \xrightarrow{\mu_2'} TS_2$, где $TS' \in \mathcal{TS}_{\mathbf{N}}$.*

Доказательство. В силу существования конструкции открытых морфизмов имеем, что TS_1 и TS_2 подобны по временным словам. По теореме 5 получаем, что данные временные структуры событий TIT-эквивалентны. Теперь, воспользовавшись построением конструкции открытых морфизмов, предложенным в доказательстве теоремы 5, получаем конструкцию открытых морфизмов, в вершине которой находится конечная временная структура событий TS'. При этом размерность множества событий структуры TS' ограничена числом $N_1 * N_2$, где N_i — размерность множества событий TS_i, $(i = 1, 2)$. Ограничение на временные функции для TS' выполнены в силу построения. $\square$

Следствие 2. *Для конечных временных структур событий из класса $\mathcal{TS}_{\mathbf{N}}$ TIT-эквивалентность разрешима.*

Доказательство. Следует из следствия 1 и теоремы 7. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.** Лекции по теории категорий. — М: Наука, 1974. — 438 с.
2. **Alur R., Courcoubetis C.,Dill D.** Model checking in dense real time // Information and Computation. — 1993. — Vol. 104. — P. 2–34.
3. **Alur R., Courcoubetis C., Henzinger T.A.** The observational power of clocks // Lect. Notes Comput. Sci. — 1994. — Vol. 836. — P. 162–177.
4. **Andreeva M. V., Bozhenkova E. N., Virbitskaite I. B.** Analysis of Timed Concurrent Models Based on Testing Equivalence // Fundamenta Informaticae. — 2000. — Vol. 34. — P. 1–19.
5. **Baier C., Katoen J.-P., Latella D.** Metric semantics for true concurrent real time. // Proc. 25th Intern. Colloquium (ICALP'98). — Aalborg, Denmark, 1998. — P. 568–579.
6. **Goltz U., Wehrheim H.** Causal testing // Lect. Notes Comput. Sci. — 1996. — Vol. 1113. — P. 394–406.

7. **Hennessy M., Milner R.** Algebraic laws for nondeterminism and cocurrency // J. ACM. — 1985. — Vol. 32. — P. 137–162.
8. **Hoare C.A.R.** Communicating Sequential Processes // Prentice-Hall, 1985.
9. **Hune T., Nielsen M.** Timed bisimulation and open maps. — Denmark, 1998. — (Tech. Rep. / BRICS; N RS-98-4).
10. **Joyal A., Nielsen M., Winskel G.** Bisimulation from open maps // Information and Computation. — 1996. — Vol. 127, N 2. — P. 164–185.
11. **Katoen J.-P., Langerak R., Latella D., Brinksma E.** On specifying real-time systems in a causality-based setting // Lect. Notes Comput. Sci. — 1996. — Vol. 1135. — P. 385–404.
12. **Moskaleva N., Virbitskaite I.** On the category of event structures with dense time // Lect. Notes Comput. Sci. — 2001. — Vol. 2138. — P.287–298.
13. **Murphy D.** Time and duration in noninterleaving concurrency // Fundamenta Informaticae. — 1993. — Vol. 19. — P. 403–416.
14. **Nielsen M., Cheng A.** Observing behaviour categorically // Lect. Notes Comput. Sci. — 1996. — Vol. 1026. — P. 263–278.
15. **Winskel G.** An introduction to event structures // Lect. Notes Comput. Sci. — 1989. — Vol. 354. — P. 364–397.
16. **Yoneda T., Shibayama A., Schligloff B. H., Clarke E. M.** Efficient verification of parallel real-time systems // Lect. Notes Comput. Sci. — 1993. — Vol. 697. — P. 321-333.

Москалева Н. С.

ТЕОРЕТИКО-КАТЕГОРНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТРАССОВОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВРЕМЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Препринт
99

Рукопись поступила в редакцию 12.04.2002

Рецензент Е. Н. Боженкова

Редактор З. В. Скок

Подписано в печать 3.06.2002

Формат бумаги 60×84 1/16 Объем 1,3 уч.-изд.л., 1,4 п.л.

Тираж 50 экз.

НФ ООО ИПО "Эмари" РИЦ, 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 6