Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт систем информатики
им. А. П. Ершова

В.Л. Селиванов, А.Г. Щукин

ОБ ИЕРАРХИЯХ РЕГУЛЯРНЫХ БЕЗЗВЕЗДНЫХ ЯЗЫКОВ

Препринт
69

Новосибирск 2000

В данной работе изучаются иерархии регулярных “беззвездных” языков, индуцируемые иерархиями предложений подходящих сигнатур по числу перемен кванторов в предваренной нормальной форме.

Доказано, что все уровни этих иерархий не обладают свойством редукции, но два первых уровня обладают свойством отделимости.

Установлены включения между уровнями этих иерархий, а также некоторых утончений этих иерархий.

Ключевые слова: беззвездные регулярные языки, иерархия, редукция, отделимость, утончение.

Siberian Division of the Russian Academy of Sciences
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems

V.L.Selivanov, A.G.Schukin

ON HIERARCHIES OF REGULAR STAR-FREE LANGUAGES

Preprint
69

Novosibirsk 2000

Here we study hierarchies of regular star-free languages induced by hierarchies of sentences of appropriate signature on the number of quantifier alternations in the prenex normal form. It has been proved that all levels of these hierarchies do not have the reduction property, but the first two of them have the separability property. We have found inclusions between the levels of these hierarchies, as well as between some of their refinements.

Key words: regular star-free languages, hierarchy, reduction, separability, refinement.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории автоматов известен замечательный результат Бюхи [4] о том, что регулярные языки совпадают с языками, определяемыми предложениями монадической логики второго порядка подходящей сигнатуры. Эта теорема установила тесную связь теории автоматов с математической логикой и инициировала длинную серию работ по применению методов теории автоматов в логике и методов логики в теории автоматов.

Важным шагом в разработке данного направления стала глубокая теорема МакНотона и Пейперта [8] о том, что языки, определяемые предложениями первого порядка — это в точности регулярные "беззвездные" языки (то есть языки, задаваемые обобщенными регулярными выражениями без символа $*$). Впоследствии выяснилось, что этот же класс языков задается формулами линейной временной логики, играющей основную роль в спецификации и верификации систем с конечным числом состояний.

Работы Бюхи, МакНотона, Пейперта и их многочисленных последователей показали большую сложность регулярных языков, что привело к появлению различных классификаций (или иерархий) этих языков.

Теорема МакНотона-Пейперта подсказывает естественную классификацию языков, индуцируемую традиционной для математической логики иерархией предложений по числу перемен кванторов в предваренной нормальной форме. В работах [15, 9] показано, что такие иерархии (для предложений подходящих сигнатур), по существу, совпадают с популярными в теории автоматов иерархиями Бжозовского и Штраубинга. Поэтому изучение этих иерархий представляет интерес как для логики (точнее, для теории конечных моделей, поскольку здесь рассматривается эквивалентность формул на множестве конечных моделей соответствующих теорий), так и для теории автоматов.

В данной работе мы предпримем систематическое изучение упомянутых иерархий с точки зрения общей теории иерархий. В частности, предметом изучения будут хорошо известные в дескриптивной теории множеств свойства редукции и отделимости. Этот подход оказался полезным при изучении "топологической" классификации регулярных ω-языков [13], что и привело к новому изложению глубоких результатов

[0]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства Образования Российской Федерации (грант по математике).

К. Вагнера, а также к ряду новых результатов. Из известных в теории конечных моделей [5] методов исследования применяется метод игр Эренфойхта-Фрессе.

Аналогичные вопросы представляют интерес для различных обобщений, например, для ω-языков или R-языков (последние применяются для анализа поведения так называемых непрерывных автоматов или гибридных систем [2]). Часть наших результатов переносится и на эти случаи, хотя систематическое изучение этих вопросов еще впереди.

Оставшаяся часть работы организована следующим образом. Раздел 2 содержит используемые в дальнейшем определения, некоторые вспомогательные результаты, необходимые сведения об играх Эренфойхта-Фрессе, а также нужные результаты из [18]. В разделе 3 полностью исследованы включения уровней "кванторных" иерархий для наиболее важных сигнатур, а также уровней разностных иерархий над каждым уровнем кванторных иерархий. В разделе 4 установлено отсутствие свойства редукции для всех уровней кванторных иерархий. В разделе 5 установлено, что некоторые уровни обладают свойством отделимости. В разделе 6 обсуждаются утончения кванторной иерархии в духе [12].

Постановки задач принадлежат В.Л. Селиванову, результаты раздела 5 — А.Г. Щукину, остальные результаты получены авторами совместно.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть A — конечный алфавит, A^+ — множество всех конечных слов ненулевой длины в алфавите A. *Языком* будем называть любое подмножество множества A^+. Пусть ϵ — пустое слово и $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$.

Мы будем использовать описание языков с помощью предложений формальной логики. Если слово рассматривать как конечную линейно упорядоченную структуру (в подходящей сигнатуре, включающей унарный предикат для каждого символа из алфавита A и бинарный предикат $<$), то предложения формальной логики первого порядка можно использовать для описания "беззвездных" языков. (Чтобы охватить все регулярные языки, надо добавить предложения с монадическими переменными второго порядка.)

Кроме основного алфавита A мы рассмотрим расширенный [9, 14] алфавит $A \times 2^\nu$, где ν — конечное множество переменных. Будем называть ν-структурой слово $(a_1, U_1) \ldots (a_r, U_r)$ (расширенного) алфавита $A \times 2^\nu$ такое, что множества $U_1, U_2, \ldots, U_r$ попарно не пересекаются и в объединении дают ν. Формулы со свободными переменными в ν будут выражать свойства ν-структур. Унарные предикаты Q_a, $a \in A$, будем интерпретировать так: $w \models Q_a x$ тогда и только тогда, когда w содержит букву вида (a, U), где $x \in U$. Предикат $<$ будет иметь обычный смысл: $w \models x < y$ тогда и только тогда, когда $w = (a_1, U_1) \dots (a_i, U_i) \dots (a_j, U_j) \dots (a_r, U_r)$, где $x \in U_i$, $y \in U_j$, $i < j$. Пусть $w = (a_1, U_1) \dots (a_r, U_r)$. Тогда $w \models \exists x \phi$ тогда и только тогда, когда для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, справедливо $(a_1, U_1) \dots (a_i, U_i \cup \{x\}) \dots (a_r, U_r) \models \phi$. Булевы операции интерпретируются естественным образом. Букву $(a, \emptyset)$ алфавита $A \times 2^{\nu}$ мы будем отождествлять с буквой a алфавита A.

Если ϕ — предложение, то ϕ можно интерпретировать в слове $w \in A^+$, поскольку это слово можно рассматривать как $\emptyset$-структуру. Каждое предложение описывает язык, состоящий из слов, которые удовлетворяют этому предложению. Каждому множеству формул соответствует класс языков, которые можно описать предложениями из этого множества. Мы будем использовать одни и те же обозначения для множества формул и для соответствующих классов языков.

Пусть ϕ — некоторое предложение, тогда формулой $\phi^{<x<}(x, y)$ будем обозначать результат замены в формуле ϕ каждого вхождения $\exists z(\dots)$ на $\exists z(x < z < y \wedge \dots)$ и каждого вхождения $\forall z(\dots)$ на $\forall z(x < z < y \rightarrow \dots)$ (при этом может потребоваться стандартная в аналогичных случаях замена некоторых связанных переменных). Эта формула выражает то же свойство, что и ϕ, но только для подслова, ограниченного позициями x и y. Аналогично определяются формулы $\phi^{<x}(x)$ и $\phi^{x<}(y)$.

Пусть класс S_k состоит из языков, которые можно описать предложениями вида $\exists x_1^1 \dots \exists x_{n_1}^1 \forall x_1^2 \dots \forall x_{n_2}^2 \dots Q x_1^k \dots Q x_{n_k}^k \phi$, где $Q \in \{\exists, \forall\}$, ϕ — формула без кванторов. Иерархию языков $\{S_k\}_{k \in N}$ будем называть *кванторной*. (Мы считаем множество натуральных чисел N равным $\{1, 2, \dots\}$.) Очевидно, что $S_k \cup \check{S}_k \subseteq S_{k+1}$, где $k \in N$, $\check{S}_k = \{A^+ \backslash L \mid L \in S_k\}$ — двойственный класс для S_k. Обозначим через $D_{k,l}$ множество, состоящее из языков $\bigcup\limits_{i=1}^{m} (L_{2i-1} \backslash L_{2i})$, $m \in N$, $L_i \in S_k$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и $L_i = \emptyset$, $i > l$. Иерархию языков $\{D_{k,l}\}_{l \in N}$ будем называть *разностной иерархией* над k-ым уровнем кванторной иерархии S_k.

Очевидно, что $D_{k,l} \subseteq S_{k+1}$, $k, l \in N$. Известно [7, 1, 6], что разностные иерархии над любым классом исчерпывают замыкание этого класса относительно булевых операций, и для этих иерархий справедливы соотношения: $D_{k,l+1} = \{(A^+ \backslash L_1) \cap L_2 \mid L_1 \in D_{k,l},\ L_2 \in S_k\}$ и

$D_{k,l} \cup \check{D}_{k,l} \subseteq D_{k,l+1}$, $k,l \in N$. Разностные иерархии $\{D_{k,l}\}_{l\in N}$ над каждым уровнем S_k, $k \in N$, нетривиальны [18], или, другими словами, последовательности классов языков $\{D_{k,l}\}_{l\in N}$ не стабилизируется: $D_{k,l} \neq D_{k,l+1}$, $k,l \in N$.

Определим индукцией по k множество формул специального вида класса $S_{k,r}$, $k \geqslant 0$, $r \in N$. При $r \in N$ множество формул специального вида класса $S_{0,r}$ состоит из формул без кванторов, которые находятся в дизъюнктивной нормальной форме без повторений элементарных конъюнкций и без повторений конъюнктивных членов в элементарных конъюнкциях. При $k,r \in N$ формула специального вида класса $S_{k,r}$ — это дизъюнкция попарно различных формул вида $\exists z_1^k \exists z_2^k \ldots \exists z_p^k \neg\phi$, где $p \leqslant r$, ϕ — формула специального вида класса $S_{k-1,r}$. Класс $S_{k,r}$ состоит из формул, которые эквивалентны формулам специального вида класса $S_{k,r}$. (Эквивалентность понимается как равносильность на ν-структурах. Для формул ϕ и ψ мы будем писать $\phi \equiv \psi$, если ϕ и ψ эквивалентны.) Для каждого $k \in N$ классы языков $S_{k,r}$, $r \in N$, соответствующие множествам формул $S_{k,r}$, исчерпывают класс S_k. По построению связанные переменные формул специального вида множества $S_{k,r}$ находятся среди $z_1^i, z_2^i, \ldots z_r^i$, $i \leqslant k$. Легко проверить, что число формул специального вида из $S_{k,r}$ с фиксированным набором свободных переменных конечно.

Пусть $k \geqslant 0$ и $r \geqslant 1$. Рассмотрим рефлексивные и транзитивные отношения $\leqslant_{k,r}$ на множестве структур [18].

Определение 1. Пусть ν — множество переменных, u и v — ν-структуры. Если из $u \models \phi$ следует $v \models \phi$ для любой формулы $\phi \in S_{k,r}$ со свободными переменными из ν, то будем писать $u \leqslant_{k,r} v$.

Отметим некоторые свойства этих отношений и характеризацию играми Эренфойхта-Фрессе. Опишем вариант игры Эренфойхта-Фрессе $C_{k,r}(u,v)$ с k раундами. В начале игры имеется две $\{y_1,\ldots,y_m\}$-структуры u и v. В игре участвуют два игрока. Цель первого игрока — показать, что эти две структуры различны, цель второго — показать, что они неразличимы. У каждого игрока есть kr фишек, помеченных переменными $z_1^j,\ldots,z_r^j$, $j = 1,\ldots,k$. В первом раунде первый игрок ставит свои фишки $z_1^k,\ldots,z_p^k$, $p \leqslant r$, на буквы структуры u. В результате $\{y_1,\ldots,y_m\}$-структура u превратится в $\{y_1,\ldots,y_m,z_1^k,\ldots,z_p^k\}$-структуру u'. Второй игрок в ответ на ход первого игрока ставит свои фишки $z_1^k,\ldots,z_p^k$ в другую структуру v. Получается еще одна $\{y_1,\ldots,y_m,z_1^k,\ldots,z_p^k\}$-структура v'. Продолжение этой игры ничем не отличается от игры $C_{k-1,r}(v', u')$. В конце игры получим две структуры u_0 и v_0. Считается, что второй игрок выиграл, если для каждой атомарной формулы α, $u_0 \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $v_0 \models \alpha$. Другими словами, второй игрок выигрывает, когда $u_0 \leqslant_{0,r} v_0$ и $v_0 \leqslant_{0,r} u_0$ для всех $r \in N$. В любой конкретной игре у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

Лемма 1. *Пусть u, v — ν-структуры, $k \geqslant 0$, $r \geqslant 1$. Тогда $u \leqslant_{k,r} v$, если и только если у второго игрока есть выигрышная стратегия в игре $C_{k,r}(u, v)$.*

Мы будем обозначать конкатенацию двух слов (ν-структур) u и v через uv или $u \cdot v$. Если w — слово алфавита A, мы будем использовать обозначение $w^n = w^{n-1} \cdot w$, где $n \geqslant 2$, $w^1 = w$.

Лемма 2. *Пусть ν — множество переменных, $k \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ и u_1, u_2, v_1, v_2, u_1u_2, v_1v_2 — ν-структуры. Тогда если $u_1 \leqslant_{k,r} v_1$ и $u_2 \leqslant_{k,r} v_2$, то $u_1u_2 \leqslant_{k,r} v_1v_2$.*

Введем обозначения: $c(0, r) = 1$ при всех $r \in N$, $c(k, r) = r + (r + 1)c(k - 1, r) + 1$ при $k, r \in N$. Для фиксированных k и r из N возьмем $M = r + 2(r + 1)c(k - 1, r) + 1$ и $K = M + c(k - 1, r)$. Введем операции F и G на множестве A^+ так: $F(u) = u^M$, $G(u, v) = v^K uv^K$.

Лемма 3. *Для любых $u, v \in A^+$ из $u \leqslant_{k-1,r} v$ следует $F(v) \leqslant_{k,r} G(u, v)$, где $k, r \in N$.*

Кроме сигнатуры $\Sigma_0 = \{<\} \cup \{Q_a |\ a \in A\}$, мы будем рассматривать следующие сигнатуры: $\Sigma' = \Sigma_0 \cup \{S, \min, \max\}$, $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{s, \min, \max\}$, $\Sigma_2 = \Sigma_0 \cup \{p, \min, \max\}$, $\Sigma_3 = \Sigma_0 \cup \{s, p, \min, \max\}$ и $\Sigma_4 = \Sigma' \cup \Sigma_3$. Символы этих сигнатур интерпретируются так: min, max — первая и последняя позиции в структуре; $s(x)$ — позиция, непосредственно следующая за x при условии, что x не является последней позицией, и последняя позиция в противном случае; $p(x)$ — позиция, непосредственно предшествующая x при условии, что x не является первой позицией, и первая позиция в противном случае; $S(x, y)$ — “y непосредственно следует за x”.

Если S — некоторый класс языков и ϕ — предложение сигнатуры Σ_4, которое задает некоторый язык из S, мы будем писать $\phi \in S$. Кроме того, для класса формул S и формулы ϕ сигнатуры Σ_4 мы будем писать $\phi \in S$, если ϕ эквивалентна некоторой формуле из S. Легко видеть, что для любой формулы одной из этих сигнатур можно найти эквивалентную ей формулу в сигнатуре Σ_0. Если Σ — некоторая сигнатура, то через $S_k(\Sigma)$, $S_{k,r}(\Sigma)$ и $D_{k,r}(\Sigma)$ мы будем обозначать классы, которые определяются так же, как классы S_k, $S_{k,r}$ и $D_{k,r}$, если вместо сигнатуры Σ_0 взять сигнатуру Σ. Классы $S_k(\Sigma')$, $S_{k,r}(\Sigma')$ и $D_{k,r}(\Sigma')$ будем обозначать через S'_k, $S'_{k,r}$ и $D'_{k,r}$.

Нетрудно проверить, что кванторные иерархии для сигнатур Σ', Σ_1, Σ_2, Σ_3 и Σ_4 совпадают. Это вытекает из хорошо известной в логике [17] процедуры обогащения сигнатуры определимыми предикатными и функциональными символами; надо только учесть, что S, s, p определяются друг через друга формулами очень простого вида. Совпадение кванторных иерархий объясняет, почему из введенных сигнатур в формулировках результатов фигурируют только Σ_0 и Σ'.

Следующее предложение показывает, что наличие в этих сигнатурах констант min и max оказывает влияние только на первый уровень кванторной иерархии.

Предложение 1. *Пусть* $\{<\} \subseteq \Sigma$. *Тогда* $S_n(\Sigma) = S_n(\Sigma \cup \{\min, \max\})$ *при* $n \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть $\phi \in S_n(\Sigma \cup \{\min, \max\})$, $n \geqslant 2$, и переменные x и y не входят в ϕ. Построим формулу ψ заменой всех вхождений min и max в формуле ϕ на переменные x и y, соответственно. Тогда

$$\exists x \exists y (\forall z (\neg z < x \wedge \neg y < z) \wedge \psi) \equiv \phi.$$

Таким образом, $\phi \in S_n(\Sigma)$. $\square$

Рассмотрим отношения $\leqslant'_{k,r}$, которые определяются так же, как отношения $\leqslant_{k,r}$, но уже для классов $S'_{k,r}$. Для сигнатуры Σ' можно определить игру Эренфойхта-Фрессе так же, как это было сделано выше. Тогда для этих отношений и измененого варианта игр Эренфойхта-Фрессе леммы 1–3 будут также справедливы.

3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ИЕРАРХИЯМИ

В этом параграфе рассмотрим вопрос о соотношении между разностными иерархиями для сигнатур Σ_0 и Σ'. Вопрос полностью решает следующая

Теорема 1. *Пусть алфавит A содержит не менее двух символов. Тогда для всех $k, l \in N$ справедливы следующие соотношения:*
а) $D'_{k,l} \subsetneqq D_{k+1,l}$,
б) $D'_{k,l} \not\subseteq \check{D}_{k+1,l}$,

в) $D_{k,l} \subsetneq D'_{k,l}$,
г) $D_{k,l} \not\subseteq \check{D}'_{k,l}$,
д) $D'_{k,l} \neq \check{D}'_{k,l}$,
е) $D_{k,l} \neq \check{D}_{k,l}$.

Доказательство. Доказательства пунктов *б* и *г* можно провести способом, который был применен в статье [18]. Поэтому для них мы приводим только набросок доказательства. Пусть $A = \{a, b, \ldots\}$ и $a \neq b$.

б) Для доказательства этого пункта нам понадобится

Лемма 4. *Пусть даны $k, l \in N$ и предложения $\phi_2, \ldots, \phi_{l+1}$ сигнатуры Σ_4 такие, что для любого r найдется цепочка слов $v_1, \ldots, v_{l+1}$ такая, что $v_i \leqslant_{k,r} v_{i+1}$ ($v_i \leqslant'_{k,r} v_{i+1}$), $v_i \models \phi_i$, $v_{i-1} \not\models \phi_i$. Тогда $\bigvee\limits_{j=1}^{m} (\phi_{2j} \wedge \neg\phi_{2j+1}) \notin \check{D}_{k,l}$ ($\check{D}'_{k,l}$), где $2m \geqslant l$ и все ϕ_i, $i > l+1$, — это некоторые предложения, ложные на всех ν-структурах.*

Доказательство леммы 4 можно извлечь из результатов, изложенных в статье [18]. □

Построим предложения и слова, которые будут удовлетворять условию леммы 4 для каждого k. Зафиксируем произвольное $l \geqslant 1$. Предложения $\phi^k_2, \ldots, \phi^k_{l+1} \in S_k(\Sigma_4)$ и соответствующие цепочки слов будем строить индукцией по k:

$$\phi^1_j = \bigwedge_{i=0}^{j-1} Q_a s^i(\min) \wedge \bigwedge_{i=0}^{j-2} s^i(\min) < s^{i+1}(\min),$$

$$\phi^k_j = \exists x^k_1 \ldots \exists x^k_{2p} \left(\bigwedge_{i=1}^{2p} Q_b x^k_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{p-1} S(x^k_i, x^k_{i+1}) \wedge \right.$$
$$\left. \bigwedge_{i=p+1}^{2p-1} S(x^k_i, x^k_{i+1}) \wedge x^k_p < x^k_{p+1} \wedge \neg(\phi^{k-1}_{l+3-j})^{<x<}(x^k_p, x^k_{p+1}) \right),$$

где $k > 1$, $p = 2(k-1)$, $j = 2, 3, \ldots, l+1$.

В случае $k = 1$ возьмем $v^1_i = a^i$, $i = 1, 2, \ldots, l+1$. Предположим теперь, что $k > 1$ и на $(k-1)$-м шаге мы построили цепочку слов

$v_1^{k-1}, \dots, v_{l+1}^{k-1}$. Возьмем

$$\begin{aligned} u_i^1 &= b v_i^{k-1} b, && i = 1, 2, \dots, l+1, \\ u_i^j &= G(u_i^{j-1}, u_{l+3-j}^{j-1}), && j = 2, 3, \dots, l+1,\ i = 1, 2, \dots, l+2-j, \\ v_i^k &= F^{l+1-i}(u_{l+2-i}^i), && i = 1, \dots, l+1. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4, заключаем, что $\psi = \bigvee\limits_{j=1}^{m} (\phi_{2j}^{k+1} \wedge \neg \phi_{2j+1}^{k+1}) \notin \check{D}_{k+1,l}$. По построению $\psi \in D'_{k,l}$, следовательно, $D'_{k,l} \not\subseteq \check{D}_{k+1,l}$.

в) Очевидно, что $D_{k,l} \subseteq D'_{k,l}$. Из пункта *б* следует, что $D_{k,l} \neq D'_{k,l}$.

г) Зафиксируем произвольное $l \geqslant 1$. Так же, как в доказательстве пункта *б*, строим предложения $\phi_2^k, \dots, \phi_{l+1}^k \in S_k$ и соответствующие цепочки слов:

$$\phi_j^1 = \exists x_1^1 \dots \exists x_j^1 \left(\bigwedge_{i=1}^{j} Q_b x_i^1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{j-1} x_i^1 < x_{i+1}^1 \right),$$

$$\begin{aligned} \phi_j^k = \exists x_1^k \dots \exists x_{2p}^k \Biggl(& \bigwedge_{i=1}^{2p} Q_b x_i^k \wedge \bigwedge_{i=1}^{2p-1} x_i^k < x_{i+1}^k \wedge \\ & \forall y^k \left(\bigwedge_{i=1}^{p-1} \neg(x_i^k < y^k < x_{i+1}^k) \wedge \bigwedge_{i=p+1}^{2p-1} \neg(x_i^k < y^k < x_{i+1}^k) \right) \wedge \\ & \neg(\phi_{l+3-j}^{k-1})^{<x<}(x_p^k, x_{p+1}^k) \Biggr), \end{aligned}$$

где $k > 1$, $p = 2(k-1)$, $j = 2, 3, \dots, l+1$. В случае $k = 1$, возьмем $v_i^1 = (a^r b)^i a^r$, $i = 1, 2, \dots, l+1$. Цепочки слов для $k > 1$ строим так же, как в пункте *б*. Применяя лемму 4, заключаем, что $\psi = \bigvee\limits_{j=1}^{m} (\phi_{2j}^k \wedge \neg \phi_{2j+1}^k) \notin \check{D}'_{k,l}$. По построению $\psi \in D_{k,l}$, следовательно, $D_{k,l} \not\subseteq \check{D}_{k,l}$.

д) Следует из пунктов *в* и *г*.

е) Из пунктов *в* и *г* следует, что $D_{k,l} \subsetneqq D'_{k,l}$ и $\check{D}_{k,l} \not\subseteq D'_{k,l}$, следовательно, $D_{k,l} \neq \check{D}_{k,l}$.

а) Из пункта *г* следует, что $D'_{k,l} \neq D_{k+1,l}$. Покажем, что $D'_{k,l} \subseteq D_{k+1,l}$. Достаточно показать, что $S'_k \subseteq S_{k+1}$. Возьмем произвольную формулу ψ из класса S'_k. Можно считать, что $\psi =$

$\exists x_1^1 \dots \exists x_{n_1}^1 \forall x_1^2 \dots \forall x_{n_2}^2 \dots Q x_1^k \dots Q x_{n_k}^k \phi$, где ϕ — бескванторная формула сигнатуры Σ', $Q \in \{\exists, \forall\}$. Поскольку $S(x,y) \equiv \forall z \neg(x < z < y) \wedge x < y \in \check{S}_1$, то $\phi \in B(S_1) \subseteq S_2 \cap \check{S}_2$, где $B(S_1)$ — замыкание класса S_1 относительно булевых операций. Отсюда, $\psi \in S_{k+1}$. $\square$

4. ПРИНЦИП РЕДУКЦИИ

Как известно, уровни многих аналогов кванторых иерархий в дескриптивной теории множеств, теории вычислений и теории автоматов обладают так называемым свойством редукции (см., например, [12, 13]). В этом параграфе мы доказываем, что уровни кванторных иерархий не обладают свойством редукции.

Определение 2. 1) Пусть $L, M, L', M' \subseteq A^+$, $L' \subseteq L$, $M' \subseteq M$, $L' \cup M' = L \cup M$ и $L' \cap M' = \emptyset$. Тогда будем говорить, что L' и M' — редуцирующие языки для L и M.

2) Говорят, что класс языков S обладает свойством *редукции,* если для любых $L, M \in S$ существуют редуцирующие языки $L', M' \in S$ для L, M.

Теорема 2. *Для любого алфавита, содержащего не менее двух символов, классы языков S_k, S'_k, $\check{S}_k$ и $\check{S}'_k$, $k \in N$, не обладают свойством редукции.*

Для доказательства теоремы нам понадобится

Лемма 5. *Пусть $k \in N$, $L, M \in S_k$ и для каждого $r \in N$ существуют слова u_r, v_r, w_r и x_r такие, что $u_r \leqslant'_{k,r} w_r$, $v_r \leqslant'_{k,r} w_r$, $x_r \leqslant'_{k,r} u_r$, $x_r \leqslant'_{k,r} v_r$, $u_r \in L \backslash M$ и $v_r \in M \backslash L$. Тогда классы языков S_k, S'_k, $\check{S}_k$ и $\check{S}'_k$ не обладают свойством редукции.*

Доказательство. Предположим, что существуют редуцирующие языки L' и M' из S'_k для L и M. Тогда $u_r \in L'$ и $v_r \in M'$. В силу того, что для достаточно больших r справедливо соотношение $u_r \leqslant'_{k,r} w_r$, $v_r \leqslant'_{k,r} w_r$, получим $w_r \in L' \cap M'$, что является противоречием. Таким образом, для языков $L, M \in S_k$ нет редуцирующих множеств из S'_k, следовательно, классы S_k и S'_k не обладают свойством редукции. Аналогично можно показать, что для языков $A^+ \backslash L, A^+ \backslash M \in \check{S}_k$ нет редуцирующих множеств из $\check{S}'_k$, следовательно, классы $\check{S}_k$ и $\check{S}'_k$ не обладают свойством редукции. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $A = \{a, b, \dots\}$ и $a \neq b$. Рассмотрим предложения

$$\phi_1 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \; x_1 < x_2 < x_3 \wedge Q_b x_1 \wedge Q_a x_2 \wedge Q_b x_3,$$
$$\psi_1 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \; x_1 < x_2 < x_3 \wedge Q_b x_1 \wedge Q_b x_2 \wedge Q_b x_3.$$

Эти предложения задают языки L_1 и M_1 из класса S_1. Возьмем $u_r = a^r baba^r \in L_1 \backslash M_1$, $v_r = a^r bbba^r \in M_1 \backslash L_1$, $w_r = u_r v_r$ и $x_r = a^{k+1}$. Используя характеризацию отношений $\leqslant'_{k,r}$ играми Эренфойхта-Фрессе, нетрудно проверить, что $u_r \leqslant'_{k,r} w_r$, $v_r \leqslant'_{k,r} w_r$, $x_r \leqslant'_{k,r} u_r$, и $x_r \leqslant'_{k,r} v_r$. По лемме 5, классы S_1, S'_1, $\check{S}_1$ и $\check{S}'_1$ не обладают свойством редукции.

Для $k > 1$ возьмем

$$u_r^k = G_1(u_r^{k-1}, w_r^{k-1}) F_1(w_r^{k-1}), \; v_r^k = F_1(w_r^{k-1}) G_1(v_r^{k-1}, w_r^{k-1}),$$
$$w_r^k = G_1(u_r^{k-1}, w_r^{k-1}) G_1(v_r^{k-1}, w_r^{k-1}), \; x_r^k = F_1(w_r^{k-1}) F_1(w_r^{k-1}),$$

где $u_r^1 = bu_r b$, $v_r^1 = bv_r b$, $w_r^1 = bw_r b$, $F_1(u) = F(bub)$ и $G_1(u, v) = G(bub, bvb)$, $r \in N$. В силу лемм 2 и 3, $u_r \leqslant'_{k,r} w_r$, $v_r \leqslant'_{k,r} w_r$, $x_r \leqslant'_{k,r} u_r$, $x_r \leqslant'_{k,r} v_r$, для всех $k, r \in N$. Языки L_{k+1}, M_{k+1}, $k \in N$, определим так:

$$w \in L_k \iff \underbrace{bb\ldots b}_{2k} u \underbrace{bb\ldots b}_{2k} \sqsubseteq w, \text{где } u \notin M_{k-1},$$
$$w \in M_k \iff \underbrace{bb\ldots b}_{2k} u \underbrace{bb\ldots b}_{2k} \sqsubseteq w, \text{где } u \notin L_{k-1}.$$

(Для слов v и w мы пишем $v \sqsubseteq w$, если v является фактором слова w, т.е. $w = u_1 v u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in A^*$.) Тогда $L_k, M_k \in S_k$, $k, r \in N$. (Формулы из класса S_k для описания языков L_k и M_k можно построить таким же способом, каким были построены формулы ϕ_j^k в пункте *г* доказательства теоремы 1.)

Покажем, что $u_r^k \in L_k \backslash M_k$ и $w_r^k \in L_k$, $k \geqslant 2$, индукцией по k. При $k = 2$, $u_r^2 = G(b^2 u_r b^2, b^2 w_r b^2) F(b^2 w_r b^2)$, следовательно, $b^4 u_r b^4 \sqsubseteq u_r^2$. Так как $u_r \in L_1 \backslash M_1$, то $u_r^2 \in L_2$. Аналогично, $w_r^2 \in L_2$. Если $b^4 u b^4 \sqsubseteq u_r^2$, то $u = z_1 b^4 z_2 b^4 \ldots z_m$, где $m \in N$ и $z_i \in \{u_r, w_r\}$. Но тогда $u \in L_1$ и, следовательно, $u_r^2 \notin M_2$.

Пусть теперь $k > 2$. По построению, $b^{k+1} u_r^{k-1} b^{k+1} = b^{2k} \tilde{u}_r b^{2k} \sqsubseteq u_r^k$, где $b^{k-1} \tilde{u}_r b^{k-1} = u_r^{k-1}$. По индуктивному предположению $u_r^{k-1} \in L_{k-1} \backslash M_{k-1}$, следовательно, $\tilde{u}_r \in L_{k-1} \backslash M_{k-1}$ и $u_r^k \in L_k$. Аналогично, $w_r^k \in L_k$. Если $b^{2k} u b^{2k} \sqsubseteq u_r^k$, то $u = z_1 b^{2k} z_2 b^{2k} \ldots z_m$, где $m \in N$,

$z_i \in \{\tilde{u}_r, \tilde{w}_r\}$, $b^{k-1}\tilde{u}_r b^{k-1} = u_r^{k-1}$ и $b^{k-1}\tilde{w}_r b^{k-1} = w_r^{k-1}$. По индуктивному предположению $u_r^{k-1}, w_r^{k-1} \in L_{k-1}$, следовательно, $\tilde{u}_r, \tilde{w}_r \in L_{k-1}$ и $u \in L_{k-1}$. Отсюда, $u_r^k \notin M_k$.

Аналогично можно показать, что $v_r^k \in M_k \backslash L_k$ и $w_r^k \in M_k$, $k \geqslant 2$. По лемме 5, классы S_k, S'_k, $\check{S}_k$ и $\check{S}'_k$, $k \geqslant 2$ не обладают свойством редукции. □

Замечание. Аналог теоремы 2 можно доказать для случая ω-языков, состоящих из бесконечных слов. Для этого можно модифицировать наше доказательство теоремы 2. При этом слова u_r, v_r, w_r, x_r, u_r^k, v_r^k, w_r^k и x_r^k, $k > 1$ из нашего доказательства можно заменить на ω-слова $u_r a^\omega$, $v_r a^\omega$, $w_r a^\omega$, $x_r a^\omega$, $u_r^k a^\omega$, $v_r^k a^\omega$, $w_r^k a^\omega$ и $x_r^k a^\omega$, а ω-языки L_k и M_k, $k \in N$, определить аналогичным образом.

5. ПРИНЦИП ОТДЕЛИМОСТИ

В этом параграфе рассматривается вопрос о том, какие из уровней кванторной иерархии обладают свойством отделимости. Напомним соответствующее

Определение 3. 1) Пусть X, Y, Z — языки. Говорят, что X *отделяет* Y от Z, если $Y \subseteq X$ и $X \cap Z = \emptyset$.

2) Для класса языков S говорят, что имеет место S-*отделимость*, если любые два непересекающиеся множества из S отделяются множеством из $S \cap \check{S}$.

Как хорошо известно, из S-редукции следует $\check{S}$-отделимость. Поэтому отсутствие отделимости для уровней кванторных иерархий усиливало бы результат раздела 4. Однако оказывается, что некоторые уровни имеют свойство отделимости.

В предыдущих параграфах рассматривались языки, не содержащие пустого слова ϵ, что вполне естественно для используемого логического подхода. В этом параграфе придется работать с регулярными выражениями, которые задают множества слов, могущих содержать пустое слово. Этим обстоятельством вызваны некоторые модификации используемых обозначений, в частности $IS_2(X)$ (см. ниже). Для $M, L \subseteq A^*$, $a \in A$ и $X \subseteq A$ пусть $LM = \{uv |\ u \in L,\ v \in M\}$, $La = \{ua |\ u \in L\}$, $aL = \{au |\ u \in L\}$, $X^+ = \{a_1 a_2 \ldots a_k |\ k \geqslant 1,\ a_i \in X\}$, $X^* = X^+ \cup \{\epsilon\}$ и $a^+ = \{a\}^+$.

Предложение 2. *Классы S_1 и S'_1 обладают, а классы $\check{S}_1$ и $\check{S}'_1$ не обладают (для подходящих алфавитов) свойством отделимости.*

Доказательство. S_1-отделимость следует из того, что любые два непустых языка из S_1 имеют непустое пересечение. Докажем S_1'-отделимость. Пусть $L, M \in S_1'$. Как хорошо известно, любой язык из S_1' представим в виде конечного объединения языков вида $w_1A^*w_2A^* \ldots w_n$, где $w_i \in A^*$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $L = u_1A^*u_2A^* \ldots u_n$, $M = v_1A^*v_2A^* \ldots v_m$, $u_i, v_j \in A^*$. В случае, когда $n = 1$ или $m = 1$, один из языков попадает в $S_1' \cap \check{S}_1'$. Пусть $n, m > 1$. Нетрудно проверить, что если языки L и M не пересекаются, то либо $u_1 \notin v_1A^*$ и $v_1 \notin u_1A^*$, либо $u_n \notin A^*v_m$ и $v_m \notin A^*u_n$. Поэтому язык $u_1A^*u_n \in S_1' \cap \check{S}_1'$ отделяет L от M.

Покажем теперь, что $\check{S}_1$ не обладает свойством отделимости. Пусть $A = \{a, b, \ldots\}$, $a \neq b$, $L = a^+$ и $M = b^+$. Языки L и M принадлежат классу $\check{S}_1$, так как они задаются формулами $\forall x Q_a x$ и $\forall x Q_b x$. Предположим, что существует $L' \in S_1' \cap \check{S}_1'$ такой, что $L \subseteq L'$ и $L' \cap M = \emptyset$. Тогда $a \in L'$, $b \in A^+ \backslash L' \in S_1' \cap \check{S}_1'$, $a \leqslant_{0,r} ab$ и $b \leqslant_{0,r} ab$ для всех $r \in N$. Следовательно, $ab \in L' \cap (A^+ \backslash L')$, противоречие.

Осталось доказать, что $\check{S}_1'$ не обладает свойством отделимости. Пусть $A = \{a, b, c\}$ и a, b, c попарно различны, $L = A^*acA^*$ и $M = A^*bcA^* \cup A^*a \cup A^*b \cup cA^*$. Тогда дополнения $\overline{L}$ и $\overline{M}$ к этим языкам в множестве A^+ принадлежат классу $\check{S}_1'$. Так как $L \cup M = A^+$, то $\overline{L}$ и $\overline{M}$ не пересекаются. Предположим, что существует язык L' из $S_1' \cap \check{S}_1'$ такой, что $\overline{L} \subseteq L'$ и $L' \cap \overline{M} = \emptyset$. Для любого $r \in N$ возьмем $u_r = a^r c^r$, $v_r = a^r bc^r$ и $w_r = a^r c^r a^r bc^r$. Тогда $u_r \in \overline{M}$ и $v_r \in \overline{L}$, следовательно, $v_r \in L'$ и $u_r \in \overline{L}' = A^+ \backslash L' \in S_1' \cap \check{S}_1'$. Используя характеризацию отношений $\leqslant_{1,r}'$ играми Эренфойхта-Фрессе, нетрудно убедиться, что $u_r \leqslant_{1,r}' w_r$ и $v_r \leqslant_{1,r}' w_r$ для всех $r \in N$. Тогда для достаточно больших r, $w_r \in L'$ и $w_r \in \overline{L}'$, противоречие. $\square$

Следствие 1. *Класс языков $S_1 \cap \check{S}_1$ совпадает с $\{\emptyset, A^+\}$, а класс $S_1' \cap \check{S}_1'$ состоит из конечных объединений языков вида $w_1A^*w_2$, где $w_1, w_2 \in A^*$.*

Доказательство. Из того, что любые два непустых языка из S_1 имеют непустое пересечение, следует, что $S_1 \cap \check{S}_1 = \{\emptyset, A^+\}$. Нетрудно проверить, что класс языков T, состоящих из конечных объединений языков вида $w_1A^*w_2$, $w_1, w_2 \in A^*$, замкнут относительно пересечения и дополнения в A^+. Возьмем произвольный язык L из $S_1' \cap \check{S}_1'$. Согласно доказательству предложения 1, L будет отделяться от языка $A^+ \backslash L$ некоторым языком L' из T, и, следовательно, либо $L = L'$, либо $L = A^+ \backslash L' \in T$. $\square$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3. *Имеет место* S_2*-отделимость.*

Доказательство теоремы будет использовать индукцию по числу букв в алфавите, поэтому классы $S_k, S'_k, \ldots$ над произвольным заданным алфавитом X мы будем обозначать через $S_k(X), S'_k(X), \ldots$.

Введем обозначение $I(X) = \{Y^* | \ Y \subseteq X\}$. В соответствии с определениями из раздела 2, $I(X)$ не является классом языков, так как множество Y^* содержит пустое слово. Для класса языков S и алфавита X через $B_X(S)$ мы будем обозначать замыкание класса S относительно операций объединения и дополнения в множестве X^+. Для любого алфавита X определим класс языков $T(X)$ индукцией по числу символов в алфавите X. Если $X = \{a\}$, то $T(X) = B_X(S)$, где $S = \{\{a^k\} | \ k \in N\}$. В случае $|X| > 1$, $T(X) = B_X(\bigcup\{T(Y) | \ Y \subsetneqq X\} \cup S)$, где S состоит из языков двух видов:

$$L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{n-1} a_{n-1} L_n, \tag{1}$$

где $n > 1$, $L_i \in T(X \backslash \{a_i\}) \cup I(X \backslash \{a_i\})$, $i < n$, $L_n \in T(Y) \cup I(Y)$, $Y \subsetneqq X$, и

$$L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{k-1} a_{k-1} X^* a_k L_{k+1} a_{k+1} \ldots L_n, \tag{2}$$

где $n > 1$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_i \in T(X \backslash \{a_i\}) \cup I(X \backslash \{a_i\})$, $i < k$, $L_i \in T(X \backslash \{a_{i-1}\}) \cup I(X \backslash \{a_{i-1}\})$, $i > k$. Обозначим, $IT(X) = T(X) \cup I(X)$, $IS_2(X) = S_2(X) \cup I(X)$.

Известно [10], что справедлива следующая

Лемма 6. Для любого конечного алфавита X, $L \in S_2(X)$ тогда и только тогда, когда L является конечным объединением языков вида

$$X_1^* a_1 X_2^* a_2 \ldots X_{n-1}^* a_{n-1} X_n^*, \tag{3}$$

где $n > 1$, $X_i \subseteq X$. □

Лемма 7. Для любого конечного алфавита X, $T(X) \subseteq S_2(X) \cap \check{S}_2(X)$.

Доказательство. Для случая $|X| = 1$, нетрудно проверить, что $T(X) = S_2(X) \cap \check{S}_2(X)$. Пусть $|X| > 1$ и $T(Y) \subseteq S_2(Y) \cap \check{S}_2(Y)$ для всех $Y \subsetneqq X$. Покажем, что $L \in T(X)$ влечет $L \in S_2(X) \cap \check{S}_2(X)$. Достаточно рассмотреть случай, когда L имеет вид (1) или (2). В силу леммы 6, L можно представить в виде конечного объединения языков вида (3) и, следовательно, $L \in S_2(X)$. Рассмотрим случай, когда L имеет вид (2):

$$L = L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{k-1} a_{k-1} X^* a_k L_{k+1} a_{k+1} \ldots L_n,$$

где $n > 1$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_i \in IT(X_i)$, $i \neq k$, $X_i = X \backslash \{a_i\}$, $i < k$, $X_i = X \backslash \{a_{i-1}\}$, $i > k$. Каждому L_i сопоставим формулу ϕ_i из $\check{S}_2$. Если $L_i \in T(X_i)$, то $L_i \in \check{S}_2(X_i)$, и существуют предложения из $\check{S}_2$, которые описывают язык L_i. Возьмем в качестве ϕ_i одно из таких предложений. Если $L_i = Y^*$, $\emptyset \neq Y \subsetneqq X$, то возьмем $\phi_i = \forall x \bigvee\limits_{a \in Y} Q_a x$, а если $L_i = \emptyset^*$, то возьмем $\phi_i = \forall x (x < x)$. Пусть

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \bigwedge_{i=1}^{n-2} x_i < x_{i+1} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} Q_{a_i} x_i,$$

$$\psi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \phi_1^{x<}(x_1) \wedge \bigwedge_{i \in J} \phi_i^{<x<}(x_{i-1}, x_i) \wedge \phi_n^{<x}(x_{n-1}),$$

$$\psi_3(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}) =$$
$$= \bigwedge_{i<k} x_i \leqslant y_i \wedge \bigwedge_{i \geqslant k} y_i \leqslant x_i \wedge (\bigvee_{i<k} x_i < y_i \vee \bigvee_{i \geqslant k} y_i < x_i),$$

$$\phi = \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \wedge$$
$$\forall x_1 \ldots \forall x_{n-1} (\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \rightarrow (\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \vee$$
$$\exists y_1 \ldots \exists y_{n-1} (\psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \wedge \psi_3(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_1, \ldots, x_{n-1})))),$$

где $J = \{2, 3, \ldots, n-1\} \backslash \{k\}$. Тогда предложение $\phi \in \check{S}_2$ описывает язык L и, следовательно, $L \in S(X) \cap \check{S}(X)$. Случай, когда L имеет вид (1), рассматривается аналогично. □

Лемма 8. *Пусть X — конечный алфавит. Тогда любой язык $L \in S_2(X)$ является конечным объединением языков двух видов:*

$$L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{n-1} a_{n-1} L_n, \tag{4}$$

где $n > 1$, $L_i \in IS_2(X \backslash \{a_i\})$, $i < n$, $L_n \in IS_2(Y)$, $Y \subsetneqq X$, и

$$L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{k-1} a_{k-1} X^* L_k X^* a_k L_{k+1} \ldots L_n, \tag{5}$$

где $n \geqslant 1$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_i \in IS_2(X \backslash \{a_i\})$, $i < k$, $L_k \in IS_2(X)$, $L_i \in IS_2(X \backslash \{a_{i-1}\})$, $i > k$.

Доказательство. Докажем три вспомогательных утверждения:

а) Любой язык $L \in S_2(X)$ вида $Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \ldots Y_k^*$, $k > 1$ где $Y_i \subseteq X$ можно представить в виде конечного объединения языков трех видов:

$$L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{n-1} a_{n-1} L_n, \tag{6}$$

где $n > 1$, $L_i \in IS_2(X\backslash\{a_i\})$, $i < n$, $L_n \in IS_2(Y)$, $Y \subsetneqq X$,

$$L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{n-1} a_{n-1} X^* L_n, \tag{7}$$

где $n > 1$, $L_i \in IS_2(X\backslash\{a_i\})$, $i < n$, $L_n \in IS_2(X)$, и

$$X^* L_1, \tag{8}$$

где $L_1 \in S_2(X)$.

б) Если в пункте *а* $Y_k = X$, то язык L можно представить в виде конечного объединения языков двух видов:

$$L_1 a_1 L_2 a_2 \ldots L_{n-1} a_{n-1} X^* L_n X^*, \tag{9}$$

где $n > 1$, $L_i \in IS_2(X\backslash\{a_i\})$, $i < n$, $L_n \in IS_2(X)$, и

$$X^* L_1 X^*, \tag{10}$$

где $L_1 \in S_2(X)$.

б′) Любой язык вида $X^* L$, где $L \in S_2(X)$, можно представить в виде конечного объединения языков двух видов:

$$X^* L_1 X^* a_1 L_2 a_2 \ldots a_{n-1} L_{n-1} a_n L_n,$$

где $n > 1$, $L_i \in IS_2(X\backslash\{a_{i-1}\})$, $i > 1$, $L_1 \in IS_2(X)$, и

$$X^* L_1 X^*,$$

где $L_1 \in S_2(X)$.

Доказательства пунктов *а* и *б* проведем одновременно. Достаточно рассмотреть случай, когда алфавит X является минимальным по включению, удовлетворяющим условию $L \subseteq X^+$. Предположим, что пункт *а* (пункт *б*) не верен. Возьмем минимальное выражение $Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \ldots Y_k^*$, для которого не существует требуемого представления. (Мы считаем, что выражение $Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \ldots Y_k^*$ меньше выражения $X_1^* a_1 X_2^* a_2 \ldots X_m^*$, если $k < m$ или $k = m$ и $Y_i \subseteq X_i$, $i \leqslant k$, причем хотя бы одно включение собственное.) Предположим, что существует индекс j_0 такой, что $Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \ldots Y_{j_0}^* \subseteq (X\backslash\{b_{j_0}\})^*$, тогда $M = Y_{j_0+1}^* b_{j_0+1} \ldots Y_k^* \notin I(X)$, и мы можем записать язык $Y_{j_0+1}^* b_{j_0+1} \ldots Y_k^*$ в виде конечного объединения $\bigcup\limits_i M_i$ языков вида (6), (7) и (8) (вида (9), (10)). Тогда $L =$

$\bigcup_i (Y_1^* b_1 \dots Y_{j_0}^* b_{j_0} M_i)$ — объединение языков вида (6), (7) и (8) (вида (9), (10)), чего не может быть. Следовательно, такого индекса j_0 нет. Тогда найдется такой номер $j_1 > 1$, что $Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \dots Y_{j_1-1}^* b_{j_1-1} \subseteq (Y_{j_1} \setminus \{b\})^*$, $b \in Y_{j_1}$. Тогда $L = Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \dots Y_{j_1-1}^* b_{j_1-1} (Y_{j_1} \setminus \{b\})^* b Y_{j_1}^* b_{j_1} \dots Y_k^* \bigcup M$, где $M = Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \dots Y_{j_1-1}^* b_{j_1-1} (Y_{j_1} \setminus \{b\})^* b_{j_1} \dots Y_k^*$. Язык M является конечным объединением языков вида (6), (7) и (8) (вида (9), (10)) в силу выбора выражения $Y_1^* b_1 Y_2^* b_2 \dots Y_k^*$. Множество $Y_{j_1}^* b_{j_1} \dots Y_k^*$ либо имеет вид Y^*, где $Y \subseteq X$, либо, так же как и M, является конечным объединением языков вида (6), (7) и (8) (вида (9), (10)). Следовательно, L тоже можно записать в виде такого объединения. Противоречие.

Пункт *б′* доказывается симметрично пункту *б*. Утверждение леммы следует из пунктов *а* и *б′*. $\square$

Лемма 9. *Пусть* $L = X_1^* a_1 X_2^* a_2 \dots X_n^*$, *где* $n > 1$, $X_i \subseteq X$, $i \leqslant n$, $M \in S_2(X)$. *Тогда* $L \cap M$ *является конечным объединением языков вида* $L_1 a_1 L_2 a_2 \dots L_n$, *где* $L_i \in IS_2(X_i)$, $i \leqslant n$.

Доказательство. Пусть, например, $L = X_1^* a_1 X_2^* a_2 X_3^*$, $M = Y_1^* b Y_2^*$. Рассмотрим следующие условия (1)–(5) и соответствующие им языки $M_1, \dots, M_5$:

(1) $b \in X_1,\ a_1, a_2 \in Y_2,$ $\qquad M_1 = Z_{1,1}^* b Z_{1,2}^* a_1 Z_{2,2}^* a_2 Z_{3,2}^*,$

(2) $a_1 = b,\ a_2 \in Y_2,$ $\qquad M_2 = Z_{1,1}^* a_1 Z_{2,2}^* a_2 Z_{3,2}^*,$

(3) $a_1 \in Y_1,\ b \in X_2,\ a_2 \in Y_2,$ $\qquad M_3 = Z_{1,1}^* a_1 Z_{2,1}^* b Z_{2,2}^* a_2 Z_{3,2}^*,$

(4) $a_1 \in Y_1,\ b = a_2,$ $\qquad M_4 = Z_{1,1}^* a_1 Z_{2,1}^* a_2 Z_{3,2}^*,$

(5) $a_1, a_2 \in Y_1,\ b \in X_3,$ $\qquad M_5 = Z_{1,1}^* a_1 Z_{2,1}^* a_2 Z_{3,1}^* b Z_{3,2}^*,$

где $Z_{i,j} = X_i \cap Y_j$, $i, j \leqslant 5$. Легко проверить, что $L \cap M = \bigcup_i \{M_i |$ выполнено условие (i)$\}$. $\square$

Нам будет нужно следующее техническое

Определение 4. Пусть S — класс языков, Y — конечный алфавит.

1) Будем говорить, что S обладает свойством *специальной* $T(Y)$-*отделимости*, если для любых $L, M \in S$ из того, что $Y^* M Y^* \cap L = \emptyset$, следует, что L отделим от $Y^* M Y^*$ некоторым языком из $T(Y)$.

2) Будем говорить, что справедлива *специальная* $S_2(Y)$-*отделимость,* если любые два непересекающиеся множества из $S_2(Y)$ отделяются множеством из $T(Y)$.

Лемма 10. *Пусть для алфавита X справедлива специальная $S_2(X)$-отделимость. Тогда, если $L \in S_2(X)$, $M \in IS_2(X)$, $L \cap M = \emptyset$, то существует множество $L' \in T(X)$ такое, что $L \subseteq L'$, $L' \cap M = \emptyset$.*

Доказательство. Если $M \in S_2(X)$, то требуемое множество существует в силу специальной $S_2(X)$-отделимости. Пусть $M = Y^*$, $Y \subseteq X$. Тогда в качестве L' можно взять $\bigcup\{(Y\backslash\{a\})^* a Y^* | \ a \notin Y\}$. □

Лемма 11. *Пусть X — алфавит с n символами и специальная $S_2(Y)$-отделимость справедлива для всех алфавитов Y с числом символов меньше n. Тогда класс $S_2(X)$ обладает свойством специальной $T(X)$-отделимости.*

Доказательство. Пусть $L, M \in S_2(X)$ и $X^*MX^* \cap L = \emptyset$. Покажем, что L отделяется от X^*MX^* некоторым языком из класса $T(X)$. В силу леммы 8, можно считать, что L имеет вид (4) или (5). Если L имеет вид (5), то очевидно, что $X^*MX^* \cap L \neq \emptyset$, поэтому

$$L = L_1 a_1 L_2 a_2 \dots L_{n-1} a_{n-1} L_n,$$

где $n > 1$, $L_i \in IS_2(X_i)$, $i \leqslant n$, $X_i = X\backslash\{a_i\}$, $i < n$, $X_n = Y$, $Y \subsetneqq X$. Возьмем язык

$$L' = X_1^* a_1 X_2^* a_2 \dots X_{n-1}^* a_{n-1} X_n^*. \tag{11}$$

Тогда $L \subseteq L'$ и $L' \in T(X)$. Если $M' = X^*MX^* \cap L' = \emptyset$, то языки L и X^*MX^* отделяются языком L'. Пусть $M' \neq \emptyset$. В силу леммы 9, можно считать, что $M' = M_1 a_1 M_2 a_2 \dots M_n$, где $M_i \in IS_2(X_i)$, $i \leqslant n$. Если $L_i \cap M_i \neq \emptyset$ для всех i, то $X^*MX^* \cap L \neq \emptyset$, следовательно, $L_{j_0} \cap M_{j_0} = \emptyset$ для некоторого j_0. По условию и лемме 10 существует язык $L'_{j_0} \in IT(X_{j_0})$ такой, что $L_{j_0} \subseteq L'_{j_0}$ и $L'_{j_0} \cap M_{j_0} = \emptyset$. Но тогда, если мы в (11) заменим $X^*_{j_0}$ на L'_{j_0}, мы получим язык $L'' \in T(X)$ такой, что $L \subseteq L''$ и $L'' \cap X^*MX^* = \emptyset$. □

Лемма 12. *Пусть X — алфавит с n символами и специальная $S_2(Y)$-отделимость справедлива для всех алфавитов Y с числом символов меньше n. Тогда, если $S_2(X)$ обладает свойством специальной $T(X)$-отделимости, то справедлива и специальная $S_2(X)$-отделимость.*

Доказательство. Пусть $L, M \in S_2(X)$ и $L \cap M = \emptyset$. Покажем, что L отделяется от M некоторым языком из класса $T(X)$. В силу леммы 8, можно считать, что L имеет вид (4) или (5). Рассмотрим случай, когда

L имеет вид (5):

$$L = L_1 a_1 L_2 a_2 \dots L_{k-1} a_{k-1} X^* L_k X^* a_k L_{k+1} \dots L_n,$$

где $n \geqslant 1$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $L_i \in IS_2(X_i)$, $i \neq k$, $X_i = X \backslash \{a_i\}$, $i < k$, $X_i = X \backslash \{a_{i-1}\}$, $i > k$ и $L_k \in IS_2(X)$. В случае $n = 1$ мы можем воспользоваться специальной $T(X)$-отделимостью. Пусть $n > 1$. Возьмем язык

$$L' = X_1^* a_1 X_2^* a_2 \dots X_{k-1}^* a_{k-1} X^* a_k X_{k+1}^* \dots X_n^*. \tag{12}$$

Тогда $L \subseteq L'$, $L' \in T(X)$. Если $M' = M \cap L' = \emptyset$, то языки L и M отделяются языком L'. Пусть $M' \neq \emptyset$. В силу леммы 9, можно считать, что $M' = M_1 a_1 M_2 a_2 \dots M_{k-1} a_{k-1} M_k a_k M_{k+1} \dots M_n$, где $M_i \in IS_2(X_i)$, $i \neq k$, $M_k \in IS_2(X)$. Если $L_i \cap M_i \neq \emptyset$ для всех $i \neq k$ и $X^* L_k X^* \cap M_k \neq \emptyset$, то $L \cap M \neq \emptyset$, поэтому либо $L_{j_0} \cap M_{j_0} = \emptyset$ для некоторого $j_0 \neq k$, либо $X^* L_k X^* \cap M_k = \emptyset$. В первом случае, по условию и лемме 10 существует множество $L'_{j_0} \in IT(X_{j_0})$ такое, что $L_{j_0} \subseteq L'_{j_0}$ и $L'_{j_0} \cap M_{j_0} = \emptyset$. Но тогда, если мы в (12) заменим $X_{j_0}^*$ на L'_{j_0}, мы получим язык $L'' \in T(X)$ такой, что $L \subseteq L''$ и $L'' \cap M = \emptyset$. Пусть теперь $X^* L_k X^* \cap M_k = \emptyset$. Если $L_k \in I(X)$, то $X^* L_k X^* = X^*$ и, следовательно, язык L' отделяет L от M. Пусть $L_k \notin I(X)$. По условию и лемме 10, существует язык $L'_k \in T(X)$ такой, что $X^* L_k X^* \subseteq L'_k$ и $L'_k \cap M_k = \emptyset$. Но тогда, если мы в (12) заменим X^* на L'_k, мы получим язык $L'' \in T(X)$ такой, что $L \subseteq L''$ и $L'' \cap M = \emptyset$. Случай, когда L имеет вид (4), рассматривается аналогично. $\square$

Доказательство теоремы 3. В случае, когда $|X| = 1$, нетрудно проверить, что справедливо равенство $S_2(X) = T(X)$, и, следовательно, выполняется специальная $S_2(X)$-отделимость. Для $|X| > 1$ специальная $S_2(X)$-отделимость получается из лемм 11 и 12 индукцией по числу символов в алфавите X. Специальная $S_2(X)$-отделимость влечет $S_2(X)$-отделимость. $\square$

В [10] приведена характеризация языков класса $S_2 \cap \check{S}_2$ в терминах так называемых недвусмысленных языков. Из доказательства теоремы вытекает следующее утверждение, дающее более конкретное описание этого класса.

Следствие 2. Классы $T(X)$ и $S_2(X) \cap \check{S}_2(X)$ совпадают над любым алфавитом X.

Доказательство. Пусть X — произвольный алфавит и $L \in S_2(X) \cap \check{S}_2(X)$. Покажем, что $L \in T(X)$. Согласно доказательству теоремы справедлива специальная $S_2(X)$-отделимость, следовательно, языки L и $X^+ \backslash L$ отделяются некоторым языком M из $T(X)$. Ясно, что $L = M$ или $L = X^+ \backslash M$. Поэтому $L \in T(X)$. $\square$

Результаты этого параграфа наводят на мысль, что все классы S_n, S'_n обладают, а все классы $\check{S}_n, \check{S}'_n$ не обладают свойством отделимости. В этом парграфе приведены все известные нам к настоящему времени факты в этом направлении.

6. УТОНЧЕНИЯ

Здесь приведем некоторые замечания о возможных дальнейших (наряду с разностными иерархиями) утончениях кванторных иерархий. Сначала рассмотрим вопрос о дискретности разностных иерархий.

Предложение 3. *1) Иерархия $\{D_{1,n}\}_n$ дискретна в каждом уровне, т.е. $D_{1,n+1} \cap \check{D}_{1,n+1} = D_{1,n} \cup \check{D}_{1,n}$.*

2) Пусть алфавит содержит более одного символа. Тогда при любом k иерархии $\{D_{k+1,n}\}_n$ и $\{D'_{k,n}\}_n$ не дискретны ни в каком уровне.

Доказательство. 1) Достаточно доказать, что если $X \notin D_{1,n} \cup \check{D}_{1,n}$, то $X \notin D_{1,n+1} \cap \check{D}_{1,n+1}$. Согласно [18], из $X \notin D_{1,n} \cup \text{Ḑ}_{1,n}$ следует, что существуют альтернирующие цепочки слов $u_0 \subseteq \cdots \subseteq u_n$ и $v_0 \subseteq \cdots \subseteq v_n$ длины n для X, начинающиеся как со слова из X, так и со слова, не принадлежащего X (т.е. $u_0 \in X, v_0 \notin X$, $u_i \in X$ тогда и только тогда, когда $u_{i+1} \notin X$, и аналогично для второй цепочки). Запись $u \subseteq v$ означает, как обычно, что $v = w_1 u_1 \ldots w_k u_k w_{k+1}$ для некоторых $w_i \in A^*$, где $u = u_1 \ldots u_k$, $u_j \in A$.

Пусть $w = u_n v_n$, тогда одна из цепочек $u_0, \ldots, u_n, w$ и $v_0, \ldots, v_n, w$ будет альтернирующей цепочкой для X длины $n+1$, поэтому $X \notin D_{1,n+1}$ или $X \notin \check{D}_{1,n+1}$.

2) Проверим, что при $k > 1$ включение $D_{k,n} \cup \check{D}_{k,n} \subset D_{k,n+1} \cap \check{D}_{k,n+1}$ собственное. Пусть $X \in D_{k,n} \setminus \check{D}_{k,n}$, тогда при любом r существует [18] альтернирующая $\leqslant_{k,r}$-цепочка для X длины n, начинающаяся со слова, не принадлежащего X. Пусть $Y = aX \cup (A \setminus \{a\})^* \overline{X}$, где $a \in A$. Тогда для любого r найдутся альтернирующие $\leqslant_{k,r}$-цепочки для Y длины n, начинающиеся как со слова из Y, так и со слова, не принадлежащего Y. Поэтому $Y \notin D_{k,n} \cup \check{D}_{k,n}$. В то же время легко видеть, что $Y \in D_{k,n+1} \cap \check{D}_{k,n+1}$, так что язык Y обладает нужными свойствами.

Второе утверждение из 2) доказывается аналогичной конструкцией. □

Таким образом, иерархию $\{D_{1,n}\}_n$ утончить (в смысле [12]) невозможно, а для иерархий $\{D_{k+1,n}\}_n$ имеет смысл поискать естественные утончения (поскольку в других разделах теории определимости такие утончения иногда оказываются полезными).

В [11, 12] описано, как с каждой базой $\mathcal{L}$ (то есть, с последовательностью классов множеств, упорядоченной по включению так же, как $\{S_n\}$) можно связать два естественных утончения — тонкую иерархию и типизированную булеву иерархию. Пусть $\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ — тонкая иерархия, а $\{t(\mathcal{L})|\ t \in \mathcal{T}\}$ — типизированная булева иерархия над базой $\mathcal{L} = \{S_n\}$ (здесь $\mathcal{T}$ — множество булевых термов от переменных $v_k^n(k, n \geqslant 1)$; переменные $v_k^n(k \geqslant 1)$ называются переменными типа n). Напомним, что $t(\mathcal{L})$ есть множество всех значений терма t, когда переменные $v_k^n(k \geqslant 1)$ пробегают множество S_n.

В некоторых интересных случаях [12] тонкая иерархия оказывается дискретной во всех уровнях. Например [11], кванторная иерархия, определенная как и выше, только с использованием обычного отношения эквивалентности предложений, является дискретной во всех предельных уровнях. К сожалению, для иерархии $\{\mathcal{S}_\alpha\}$ зто не так (это следует хотя бы из известного результата [10] о том, что при любом n включения $B(S_n) \subset S_{n+1} \cap \check{S}_{n+1}$ собственные).

Вопрос о собственности иерархии $\{\mathcal{S}_\alpha\}$, т.е. об отсутствии включений $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \check{\mathcal{S}}_\alpha$ для всех $\alpha < \varepsilon_0$, пока до конца не ясен. Предварительные результаты первого из авторов показывают, что для сигнатуры Σ' тонкая иерархия является собственной, а для рассматриваемого здесь случая сигнатуры Σ_0 ответ, по-видимому, зависит от мощности алфавита.

Рассмотрим вопрос о включениях между совокупностями всех классов тонкой и тиапизированной булевой иерархий. Согласно общему результату из [12], если бы для каждого $n \geqslant 1$ один из уровней $S_n, \check{S}_n$ обладал свойством редукции, то эти совокупности были бы одинаковы. Однако выше было установлено, что все уровни $S_n, \check{S}_n$ не обладают свойством редукции. Следующая теорема решает вопрос о наличии включений между совокупностями классов тонкой и типизированной булевой иерархий.

Теорема 4. *Если алфавит содержит не менее четырех символов, то совокупности* $\{\mathcal{S}_\alpha, \check{\mathcal{S}}_\alpha | \alpha < \varepsilon_0\}$ *и* $\{t(\mathcal{L}) | t \in \mathcal{T}\}$ *не сравнимы по включению.*

Доказательство. Пусть $A = \{a, b, c, d, \ldots\}$ и символы a, b, c, d попарно различны. Используем некоторые объекты и обозначения из доказаетельства теоремы 5.7 работы [12], где аналогичное утверждение было доказано для специально построенной базы. Для доказательства соотношения $\{t(\mathcal{L})|t \in \mathcal{T}\} \nsubseteq \{\mathcal{S}_\alpha, \check{\mathcal{S}}_\alpha|\alpha < \varepsilon_0\}$ достаточно найти типизированные булевы термы t_0, t_1, t_2, для которых классы $C_i = t_i(\mathcal{L})$ попарно несравнимы по включению.

Пусть x_0, x_1 — переменные типа 1, y_0, y_1 — переменные типа 2, и

$$t_0 = (x_0 \cap \overline{x}_1 \cap y_0) \cup (\overline{x}_0 \cap x_1 \cap \overline{y}_1), t_1 = t_0 \cup (x_0 \cap x_1), t_2 = t_0 \cup (\overline{x}_0 \cap \overline{x}_1).$$

Утверждаем, что эти термы обладают нужным свойством.

Для проверки этого рассмотрим следующие языки: K — множество слов, содержащих букву a, L_0 — множество слов, содержащих букву c, L_1 — множество слов, содержащих букву d, L — множество слов, содержащих не более одного вхождения буквы a, $M = A^*b^2Lb^2A^*$, $M_0 = K \cap M$, $M_1 = \overline{K} \cup M$, (так, что $\overline{M}_1 = K \cap \overline{M}$). Пусть еще $T_0 = (L_0 \cap \overline{L}_1 \cap M_0) \cup (\overline{L}_0 \cap L_1 \cap \overline{M}_1)$, $T_1 = T_0 \cup (L_0 \cap L_1)$, и $T_2 = T_1 \cup (\overline{L}_0 \cap \overline{L}_1)$.

Ясно, что $L_i \in S_1$ и $M, M_i \in S_2$, следовательно $T_i \in C_i$. Поэтому для доказательства утверждения достаточно проверить, что $T_i \notin C_j$ при $i \neq j$.

Заметим сначала, что из [18] следует, что $T_i \notin S_2 \cup \check{S}_2$ (поскольку для любого r легко подобрать слова $u_0 \leqslant_{2,r} u_1$ и $v_0 \leqslant_{2,r} v_1$ такие, что $u_0, v_1 \notin T_i$ и $u_1, v_0 \in T_i$).

Проверим, что $T_0 \notin C_1$. Предположим противное:

$$T_0 = (X_0 \cap \overline{X}_1 \cap Y_0) \cup (\overline{X}_0 \cap X_1 \cap \overline{Y}_1) \cup (X_0 \cap X_1) \tag{13}$$

для некоторых $X_i \in S_1$, $Y_i \in S_2$.

Ясно, что X_0, X_1 не пусты (в противном случае $T_0 \in S_2 \cup \check{S}_2$, в противоречии с доказанным). Рассмотрим слово $w = cdu_0u_1$, где $u_0 \in X_0$, а $u_1 \in X_1$. По определению T_0, тогда $w \notin T_0$ (поскольку $w \in L_0 \cap L_1$), а из (13) получаем $w \in T_0$ (поскольку $w \in X_0 \cap X_1$). Получаем противоречие, доказывающее, что $T_0 \notin C_1$.

Аналогичным образом проверяются соотношения $T_1 \notin C_0$, $T_1 \notin C_2$ и $T_2 \notin C_1$.

Проверим теперь, что $T_0 \notin C_2$. Предположим противное, тогда

$$T_0 = (X_0 \cap \overline{X}_1 \cap Y_0) \cup (\overline{X}_0 \cap X_1 \cap \overline{Y}_1) \cup (\overline{X}_0 \cap \overline{X}_1), \tag{14}$$

где $X_i \in S_1$, $Y_i \in S_2$. Заметим, что $a \notin X_0 \cup X_1$ (если бы, например, $a \in X_0$, то $K \subseteq X_0$, поэтому $K \cap (\overline{X}_0 \cap X_1 \cap \overline{Y}_1) = \emptyset$; но $T_0 \subseteq K$, поэтому $T_0 \cap (\overline{X}_0 \cap X_1 \cap \overline{Y}_1) = \emptyset$, так что $T_0 = (X_0 \cap \overline{X}_1 \cap Y_0) \cup (\overline{X}_0 \cap \overline{X}_1) \in S_2$ — противоречие). Но тогда $a \in T_0$ согласно (14) и $a \notin T_0$, поскольку $T_0 \subseteq L_0 \cup L_1$. Полученное противоречие доказывает, что $T_0 \notin C_2$.

Соотношение $T_2 \notin C_0$ доказывается аналогично.

Остается проверить, что $\{\mathcal{S}_\alpha, \check{\mathcal{S}}_\alpha | \alpha < \varepsilon_0\} \nsubseteq \{t(\mathcal{L}) | t \in \mathcal{T}\}$. Достаточно показать, что $\mathcal{S}_{\omega+1} \neq t(\mathcal{L})$ для любого $t \in \mathcal{T}$. Пусть t содержит только переменные из множества $V = \{v_k^n | n, k \leqslant m\}$. Представим t в виде $t = \cup\{t_U | U \in \mathcal{X}\}$, где $\mathcal{X} \subseteq P(V)$ и $t_U = (\cap\{v_k^n | v_k^n \in U\}) \cap (\cap\{\overline{v}_k^n | v_k^n \notin U\})$. Рассмотрим тонкую иерархию $\{\mathsf{S}_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ над базой $\{\mathcal{L}_n\}$, $\mathcal{L}_n \subseteq P(P(V))$, определенной в доказательстве теоремы 5.1 из [12].

Схема доказательства соотношения $\mathcal{S}_{\omega+1} \neq t(\mathcal{L})$ такова: в случае $\mathcal{X} \notin \mathsf{S}_{\omega+1}$ докажем, что $t(\mathcal{L}) \nsubseteq \mathcal{S}_{\omega+1}$, а в случае $\mathcal{X} \in \mathsf{S}_{\omega+1}$ — что $\mathcal{S}_{\omega+1} \nsubseteq t(\mathcal{L})$.

Напомним, что класс $\mathcal{S}_{\omega+1}$ состоит из языков вида

$$(X_0 \cap Y_0) \cup (X_1 \cap Y_1), \tag{15}$$

где $X_i \in S_1, Y_0, \overline{Y}_1 \in S_2, X_0 \cap X_1 \cap Y_0 = X_0 \cap X_1 \cap Y_1$.

Очевидно, что $\mathcal{S}_{\omega+1}$ можно эквивалентным образом определить как класс языков вида

$$(X_0 \cap \overline{X}_1 \cap Z_0) \cup (\overline{X}_0 \cap X_1 \cap Z_1) \cup (X_0 \cap X_1 \cap Z), \tag{16}$$

где $X_i \in S_1, Z_0, \overline{Z}_1 \in S_2, Z \in S_2 \cap \check{S}_2$.

(Отметим, что описания (15) и (16) справедливы для класса $S_{\omega+1}$ над любой базой.)

Предположим, что $\mathcal{X} \notin \mathsf{S}_{\omega+1}$ и докажем, что тогда $t(\mathcal{L}) \nsubseteq \mathcal{S}_{\omega+1}$. Как и в доказательстве теоремы 5.7 из [12], существуют подмножества $U_\alpha (\alpha \in \{0,1\}^*, |\alpha| \leqslant 2)$ множества V такие, что $U_\epsilon \leqslant_0 U_0, U_1$; $U_i \leqslant_1 U_{i0}, U_{i1}$ при $i \leq 1$; $U_\epsilon, U_0, U_{00}, U_{10} \in \mathcal{X}$ и $U_1, U_{01}, U_{11} \notin \mathcal{X}$. Из равенства $t = \cup\{t_U | U \in \mathcal{X}\}$ следует, что t отделяет $t_{U_\epsilon} \cup t_{U_0} \cup t_{U_{00}} \cup t_{U_{10}}$ от $t_{U_1} \cup t_{U_{01}} \cup t_{U_{11}}$.

Пусть L_0, L_1 и M — языки, определенные в начале доказательства теоремы. Определим языки $B_\sigma (\sigma \in \{0,1\}^*)$ следующим образом:

$$B_\epsilon = A^+, B_0 = L_0, B_1 = L_1, B_{01} = L_0 \cap M, B_{10} = L_1 \cap M, B_\sigma = \emptyset$$

для всех остальных $\sigma \in \{0,1\}^*$.

Положим $X_k^n = \cup\{B_\sigma \setminus (B_{\sigma 0} \cup B_{\sigma 1}) | v_k^n \in U_\sigma\}$. Тогда, как и в [12], $X = t(X_k^n) \in t(\mathcal{L})$ и

$$\overline{L}_0 \cap \overline{L}_1, L_0 \cap \overline{L}_1 \cap \overline{M}, \overline{L}_0 \cap L_1 \cap M \subseteq X, L_0 \cap \overline{L}_1 \cap M, \overline{L}_0 \cap L_1 \cap \overline{M} \subseteq \overline{X}. \quad (17)$$

Для доказательства соотношения $t(\mathcal{L}) \not\subseteq \mathcal{S}_{\omega+1}$ достаточно проверить, что $X \notin \mathcal{S}_{\omega+1}$. Предположим противное, тогда X имеет представление вида (15). Поскольку $\overline{L}_0 \cap \overline{L}_1 \subseteq X$, то $a \in X \subseteq X_0 \cup X_1$. Пусть, например, $a \in X_0$, тогда X_0 содержит множество K всех слов, имеющих букву a. Из (15) получаем $X \cap X_0 = X_0 \cap Y_0 \in S_2$, откуда $X \cap K = X_0 \cap Y_0 \cap K \in S_2$. Из определения M легко следует, что для любого $r \geqslant 1$ существуют слова $u, v \in K \cap L_0 \cap \overline{L}_1$ такие, что $u \leqslant_{2,r} v, u \notin M$ и $v \in M$. Из (17) получаем, что $u \in X \cap K, v \notin X \cap K$. Но тогда $X \cap K \notin S_2$ — противоречие.

Остается проверить, что $\mathcal{S}_{\omega+1} \not\subseteq t(\mathcal{L})$ при условии, что $\mathcal{X} \in \mathsf{S}_{\omega+1}$. Положим $X = (L_0 \cap \overline{L}_1 \cap M) \cup (\overline{L}_0 \cap L_1 \cap \overline{M}) \cup (L_0 \cap L_1 \cap Q)$, где $Q = aA^*$.

Из (16) следует $X \in \mathcal{S}_{\omega+1}$, так что достаточно проверить справедливость соотношения $X \notin t(\mathcal{L})$. Предположим противное, тогда $X = t(X_k^n)$ для подходящих $X_k^n \in S_n$. Поскольку $\mathcal{X} \in \mathsf{S}_{\omega+1}$, $\mathcal{X}$ имеет представление вида (16), только с рукописными $\mathcal{X}, \mathcal{Z}_i, \mathcal{Z} \subseteq P(V)$. Мы имеем $\mathcal{Z} \in S_2 \cap \check{S}_2$, поэтому, согласно утверждению a) в доказательстве теоремы 5.1 из [12], $\mathcal{Z} \in B(S_1)$. Пусть $X_i = \cup\{t_U | U \in \mathcal{X}_i\}$ и аналогично для Z_i, Z. По утверждению b) в доказательстве теоремы 5.1 из [12], для языка X получим представление (16), в котором $Z \in B(S_1)$. Как и выше, X_0 и X_1 не пусты. Поскольку Z принадлежит некоторому уровню разностной иерархии над S_1, для некоторого слова u будем иметь: $R \subseteq \overline{Z}$ или $R \subseteq Z$, где $R = \{v | u \subseteq v\}$. В случае $R \subseteq \overline{Z}$ для слова $w = acduu_0u_1$ (где $u_i \in X_i$) получим $w \in Q \setminus Z$. В случае $R \subseteq Z$ для слова $w = cduu_0u_1$ получим $w \in Z \setminus Q$. В любом случае слово w отличает X от $t(X_k^n) = (X_0 \cap \overline{X}_1 \cap Z_0) \cup (\overline{X}_0 \cap X_1 \cap Z_1) \cup (X_0 \cap X_1 \cap Z)$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ADDISON J. The method of alternating chains // The theory of models (J.W. Addison, L.A. Henkin, and A. Tarski, editors). — Amsterdam: North Holland, 1965. — Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley. — P. 1–16.
2. ALUR R., DILL D. A theory of timed automata // Theor. Comput. Sci. — 1994. — Vol. 126. — P. 183–235.

3. BRZOZOWSKI J.A., KNAST R. The dot-depth hierarchy of star-free languages is infinite // J. Comput. System Sci. — 1978. — Vol. 16. — P. 37–55.
4. BÜCHI J.R. Weak second-order arithmetic and finite automata // Z. Math. Logik und Grundl. Math. — 1960. — Vol. 6. — P. 66–92.
5. EBINGHAUS H.D., FLUM J. Finite Model Theory. Springer. — New York, 1995.
6. ЕРШОВ Ю.Л. Об одной иерархии множеств // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7. — С. 15–47.
7. HAUSDORFF F. Grundzüge der Mengenlehre. — Leipzig, 1914.
8. MCNAUGHTON R., PAPERT S. Counter-free automata. — MIT Press, Cambridge, Massachusets, 1971.
9. PERRIN D., PIN J.E. First-order logic and star-free sets // J. Comput. System. Sci. — 1986. — Vol. 32. — P. 393–406.
10. PIN J.E. Logic on words // Bulletin of the EATCS. — 1994. — Vol. 54. — P. 145–165.
11. СЕЛИВАНОВ В.Л. Тонкая иерархия формул // Алгебра и логика. — 1991. — Т. 30. — С. 568–582.
12. SELIVANOV V.L. Fine hierarchies and Boolean terms // J. Symbolic Logic. — 1995. — Vol. 60. — P. 289–317.
13. SELIVANOV V.L. Fine hierarchy of regular ω-languages // Theoretical Computer Science — 1998. — Vol. 191. — P. 37–59.
14. STRAUBING H. Finite Automata, Formal Logic, and Circuit Complexity. — Birkhäuser, 1994.
15. THOMAS W. Classifying regular events in symbolic logic // J. Comput. System Sci. — 1982. — Vol. 25. — P. 360–376.
16. THOMAS W. An application of the Ehrenfeucht-Fraïssé game in formal language theory // Bull. Soc. Math. France, Mem. — 1984. — Vol. 16. — P. 11–21.
17. ШЕНФИЛД ДЖ. Математическая логика. — Наука, М., 1975.
18. ЩУКИН. А.Г. Разностные иерархии регулярных языков // Вычислительные системы. — 1998. — Т. 161. — С. 141–155.

В.Л. Селиванов, А.Г. Щукин

ОБ ИЕРАРХИЯХ РЕГУЛЯРНЫХ БЕЗЗВЕЗДНЫХ ЯЗЫКОВ

Препринт
69

Рукопись поступила в редакцию 24.11.1999
Рецензент Н. В. Шилов
Редактор З. В. Скок

Подписано в печать 18.01.2000
Формат бумаги 60×84 1/16 Объем 1,7 уч.-изд.л., 1,8 п.л.
Тираж 50 экз.

ЗАО РИЦ “Прайс-курьер”, 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 6