# Теория нечетких множеств как инструмент разработки систем искусственного интеллекта

к.т.н. В.И.Красинский v.i.krasinsky@yandex.ru

**"Всякая точная наука основана на приблизительности". Б.Рассел**

**Содержание**: **Стр.**

**1. Примеры нечеткости представления знаний,**
что имеет место во всех реальных задачах прогноза, проектирования

**1.1.** Пример недостаточности двоичной логики и связанной с ней четкой классификацией. Пусть имеются три группы людей, разделенных по отношению к какой–либо идее: сторонники идеи, противники идеи, нейтральные, или безразличные к этой идее люди.

Предположим, социологи проводят опрос людей о пользе купания в холодной воде (моржевании). Сторонники и противники ответят однозначно - "да" или "нет", а нейтральные могут ответить по-разному в зависимости от обстоятельств, или не ответить совсем.
В результате четкого разделения опрошенных людей на три класса не получится.
Реальный учет многообразия общественного мнения – одна из задач современной социологии. Теория НМ для этих целей уже активно применяется.

**1.2.** Пример нечеткого представления понятия "молодой специалист".

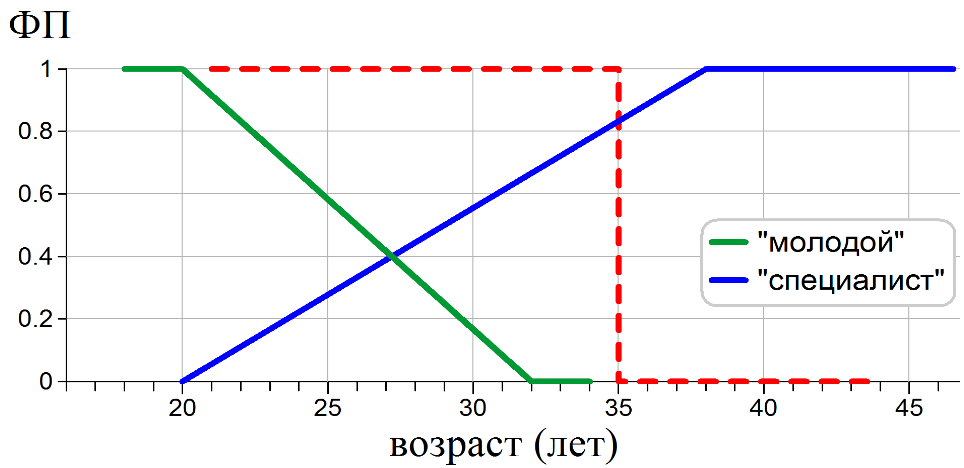


Рис.1

**1.3.** Пример толерантной классификации объектов предметной области в многозначном (списковом) числовом и качественном признаковом пространстве, когда значения признаков относят конкретный объект не к одному, а к нескольким разным классам (таксонам).
Проблема распознавания объектов по отношению к таким пересекающимся или разрывным классам не имеет решения в парадигме классической теории вероятностей, где требуется однозначная принадлежность объекта к одному из классов - $P(A) + P(\neg A) = 1$
(полная группа несовместных событий).

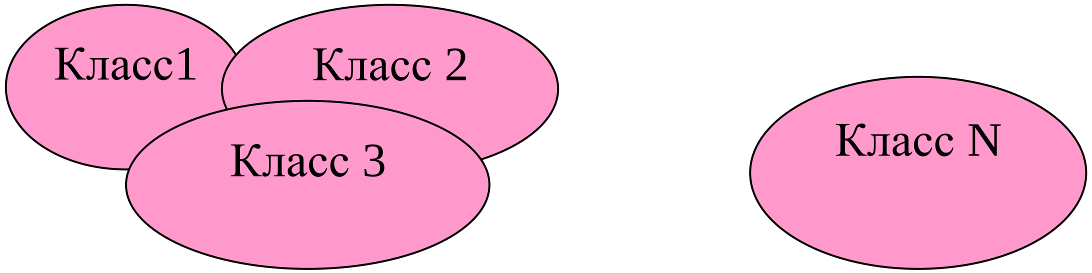


Рис. 2

## 2. Основные понятия теории нечетких множеств

### 2.1. Функция принадлежности

Основным понятием теории НМ [1, 2] является решетчатая или непрерывная функция принадлежности (ФП), обычно обозначаемая как $\mu_A(x)$,
и принимающая значения в интервале [0,1].

Определение нечеткого множества А выражается следующим образом: $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, то есть как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов $x$ универсального множества $X$ и соответствующих значений функции принадлежности. Вместо запятой иногда употребляют символы | или /. Часто также применяется обозначение: $\mu_A(x)$: $X \rightarrow [0,1]$.

Пример записи НМ из четырех элементов: $A = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.4), (x_3, 1), (x_4, 0.7)\}$.

Если имеет место $\exists x\ \mu_A(x)=1$, то нечеткое множество $A$ называется нормальным,

если же $\forall x\ \mu_A(x) <1$, то НМ называется субнормальным.

В вышеприведенном примере НМ $A$ нормально, так как $\mu_A(x_3)=1$. Нормализация НМ требуется в случае многомерного анализа нечеткой системы.

Непустое субнормальное НМ обычно нормализуют по формуле: $\mu_{A\text{н}}(x) = \mu_A(x) / \sup \{\mu_A(x)\}$, супремум по всем $x \in X$.

Автор предлагает в подходящих случаях (допустимых по существу задачи) применять следующий прием для нормализации НМ: к множеству исследуемых объектов $X$ добавлять один искусственный $x_{n+1}$, имеющий значение $\mu_A(x_{n+1})=1$.

Степень погрешности выводов при таком добавлении обычно будет меньше погрешности от изменения масштаба ФП для всех объектов. Изменение масштаба ФП особенно может повредить в многомерном анализе, когда сравниваются значения разных ФП (признаков) для одних и тех же объектов.

Вычисление значений ФП разнотипных признаков объектов предметной области является важнейшим этапом анализа, так как после этого вычисления получаются абстрактные признаки, измеренные в единой числовой шкале [0,1]. Последующий анализ этих абстрактных признаков может проводиться различными математическими методами классификации, распознавания образов и другими. Полученные НМ служат основой для создания советующих алгоритмов в предметной области как систем искусственного интеллекта.

### 2.2. Множества уровня $\alpha$ НМ

$\alpha$–срезом $A_\alpha$ называется четкое подмножество универсального множества X, определяемое как

$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in [0,1]$.

Иначе говоря, четкое множество $A_\alpha$ состоит из тех элементов универсума X, для которых уровень совместимости с A не менее $\alpha$.

Множество уровня 1 называется ядром нечеткого множества:

$Core(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$.

Множество строгого уровня 0 называется носителем (support) НМ:

$supp\ A = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Семейство $C(A)=\{A_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$ всех $\alpha$–срезов есть монотонная последовательность, удовлетворяющая условию:

$0 < \alpha \leq \beta \leq 1 \Rightarrow A_\alpha \supseteq A_\beta$ (количество элементов тем меньше, чем "выше в гору").

Это семейство позволяет следующим образом представить НМ с помощью обычных множеств:

$\forall x,\ \mu_A(x)=\sup\{\alpha \mid x \in A_\alpha\}$.

Это так называемая теорема декомпозиции НМ.

*Характерно значение ФП уровня* $\alpha$=0.5.
Элементы НМ, для которых $\mu_A(x) = 0.5$, называются точками перехода НМ.
Это ситуация "не знаю", или состояние наибольшей неопределенности.
С этим уровнем связано понятие множества, ближайшего к заданному НМ –
это такое четкое множество, элементы которого характеризуются $\mu_A(x) > 0.5$.

Важно понятие выпуклости НМ. Нечеткое множество A в пространстве $X=R^n$ называется выпуклым тогда и только тогда, когда его ФП выпукла, то есть для каждой пары точек x, y из X удовлетворяется неравенство:

$\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) \ge \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$ для всех $\lambda$: $0 \le \lambda \le 1$.

Это означает, что если аргумент ФП выпуклого НМ находится внутри некоторого интервала, то соответствующее ему значение ФП не может быть меньше значения ФП на одной из границ интервала.

### 2.3. Другие способы учета неопределенности

**Теория Демпстера-Шефера** [3, 39], оперирующая с неаддитивными нижними и верхними вероятностями, а также с мерами возможности и необходимости.

Известны мера необходимости пересечения множеств
и мера возможности объединения множеств:

$N(A\cap B)=\min(N(A), N(B))$ $\Pi(A\cup B)=\max(\Pi(A), \Pi(B))$

Меры необходимости и возможности взаимосвязаны:

$\Pi(A) \geq N(A)$;     $N(A)=1-\Pi(\neg A)$;     $\Pi(A)=1-N(\neg A)$.

При этом $\Pi(A)+\Pi(\neg A) \geq 1$;     $N(A)+N(\neg A) \leq 1$.

Г.Шефером [39] доказано, что нижняя $P_1$ и верхняя $P_2$ неаддитивные вероятности А.Демпстера [3] значений числового признака *многозначных объектов* равны, соответственно, мерам необходимости и возможности этих значений, вычисляемым по относительным мощностям $m(A_i)=|A_i|/|X|$ вложенных фокальных элементов (подмножеств) универсума $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_r \subseteq X$.     При этом должно соблюдаться нормирующее условие $\sum m(A_i)=1$.

Другой подход к учету пересечений классов числовых признаков, вместо вычисления диапазонов вероятностей Демпстера $P_1$ и $P_2$ для каждого значения признака, основан на доказательстве Д.Дюбуа и А.Прада [4] – значение ФП объекта к НМ может вычисляться по относительным мощностям вложенных ФЭ: $\mu_A(x)=\sum m(A_i)\cdot T_i(x)$, и является необходимой (гарантированной) степенью нечеткости объекта. Видно, что в вычислении значения $\mu_A(x)$ участвуют все возможные значения признака по всем объектам. Здесь $T_i(x)$ есть характеристическая функция соответствия объекта и квантованного значения признака.

Мы используем этот подход для вычисления ФП к НМ *числовых многозначных* признаков таксонов-объектов.

**Теория возможностей,** основанная на идеях Заде Л. [4], Дюбуа Д. [5].

Известен подход Г.Шефера, развитый в работах Д.Дюбуа, А.Прада и G.Resconi [25], в котором требование полноты группы несовместных событий заменяется распределением единичной "массы уверенности" на все возможные события. Мы используем этот подход для вычисления ФП к НМ *номинальных многозначных* признаков таксонов-объектов.

Близкий к НМ подход к описанию нечеткости предложен в работе А.С.Нариньяни [6]: **недоопределенное множество** описывается четверкой: $H = < {}^{+}A, {}^{-}A, M_b, M_a >$.

Здесь множества ${}^{+}A$ и ${}^{-}A$ есть конечные подмножества универсального множества X, причем ${}^{+}A$ есть множество элементов $x \in X$, которые точно принадлежат множеству (денотату) A, а ${}^{-}A$ есть множество элементов $x \in X$, которые точно не принадлежат множеству A.

Натуральные числа $M_b$, $M_a$ выражают соответственно верхнюю и нижнюю оценки мощности множества A (то есть задается замкнутый интервал $[M_a, M_b]$ натуральных чисел).

Это определение, моделирующее неполные сведения о конкретной совокупности A элементов некоторого универсума X, неявно задает трехзначную функцию принадлежности объекта к НМ:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } {}^{+}A \\ 0 \text{ для } {}^{-}A \\ ? \text{ для } X \setminus ({}^{+}A \cup {}^{-}A) \end{cases}$$

Естественным обобщением четверки H является переход к паре

$T = < \mu_A(x), \mu_{|A|}(N) >$, где $\mu_A(x)$ есть непрерывная ФП элементов $x \in X$, а $\mu_{|A|}(N)$ характеризует возможность для элементов ряда натуральных чисел быть значением мощности данного множества A. Таким образом, для задания недоопределенного множества по Нариньяни требуется определить два нечетких множества в смысле Заде.

В качестве альтернативного теории НМ способа обработки *нечеткой числовой* информации также можно применить **интервальные методы** [7].
В этом случае указываются минимальное и максимальное значения измеряемой величины.

Общий недостаток, по сравнению с теорией НМ, перечисленных способов учета неопределенности состоит в том, что они развиты *только для числовых признаков*.
В этих способах нет возможности представления и анализа номинальных (качественных) признаков и многомерного анализа объектов по совокупности разнотипных признаков.

### 2.4. Лингвистичекие переменные

Лингвистическая переменная отличается от числовой переменной тем, что ее значениями (термами) являются не числа, а слова или предложения на естественном или формальном языке. Как отмечал Л.Заде [9, 10, 40], большинство практических задач распознавания не допускают точной математической формулировки, откуда следует, что методы, основанные на лингвистическом подходе, могут оказаться более подходящими для нестрогости, присущей таким задачам.

Лингвистические переменные могут быть иерархическими, например,
переменная внешность может иметь подчиненную переменную красивый со значениями
очень красивый, обыкновенный, некрасивый.
Каждый терм лингвистической переменной задает соответствующее нечеткое множество.
Например, терм лингвистической переменной истинный может в некотором приложении иметь значения *истинный* = {(0.5, 0.7), (0.7, 0.8), (0.9, 0.9), (1, 1) }.

В этом примере пара (0.5, 0.7) означает, что совместимость значения истинности 0.5 с термом истинный равна 0.7 - значение функции принадлежности.

### 2.5. Операции с нечеткими множествами

В алгебре НМ выполняются законы Де Моргана:

$\neg( A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ $\qquad\qquad$ $\neg( A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

*Включение*

Определено, что A содержится в B, если

$\forall x \in E$: $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$, и обозначается $A \subset B$.

Пример. Пусть $E = \{x_1, x_2, x_3,\}$, .

$A = \{( x_1 / 0.4), (x_2 / 0.2), (x_3 / 0)\}$.

$B = \{( x_1 / 0.3), (x_2 / 0.1), (x_3 / 0)\}$.

Имеем $B \subset A$, так как $0.3 < 0.4$, $0.1 < 0.2$, $0 = 0$.

*Равенство*

Определено, что A и B равны тогда и только тогда, когда

$\forall x \in E$: $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, и обозначается $A = B$.

Если хотя бы для одного элемента равенство $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ не выполняется, то A и B не равны, и обозначается $A \neq B$.

*Дополнение (отрицание)*

Определено, что A и B дополняют друг друга, если

$\forall x \in E$: $\mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$, и обозначается $A = \neg B$, или $\neg B = A$.

Очевидно, что всегда $\neg(\neg A) = A$.

*Пересечение*

Пересечение $A \cap B$ двух НМ в универсальном множестве E определеяется:

$\forall x \in E$: $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

*Объединение*

Объединение $A \cup B$ двух НМ в универсальном множестве E определеяется:

$\forall x \in E$: $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

*Разность*

Разность двух НМ в универсуме E определеяется так:

$A - B = A \cap \neg B$. Часто разность множеств обозначают $A \setminus B$ :

$\forall x \in E$: $\mu_{A \cap \neg B}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$

*Нечеткое событие*

НМ служит основой для определения понятия нечеткого события [41].

Пусть $X = \{x\}$ – пространство элементарных событий с заданными на нем вероятностями $p(x)$. Нечетким событием $A_F$ называется НМ элементарных событий, определенное на множестве X:

$A_F = \cup\ \mu_F(x)|x$ по всем $x \in X$.

Вероятность нечеткого события $A_F$ может быть вычислена по формуле:

$P(A_F) = \sum p(x_i)\ \mu_F(x_i)$, если множество X дискретное, либо :

$P(A_F) = \int \mu_F(x)\ f(x)\ dx$, где $f(x)$ – плотность вероятности событий на непрерывном множестве X.

Вероятность нечеткого события $A_F$ можно рассматривать как частный случай более общего понятия, а именно, *лингвистического математического ожидания* функции по нечеткому множеству, если это НМ отражает (задает) соответствующую лингвистическую переменную.

*Мощность нечеткого множества*

В теории множеств проблема сравнения "количеств элементов" решается следующим образом: считается, что можество $B = (b_1,b_2, ,,,)$ имеет ту же *мощность*, что и множество $A = (a_1,a_2, ,,,)$, если существует взаимно однозначное соответствие $b=f(a)$ между элементами этих множеств. Логично расширить это понятие на нечеткие множества: "сколько элементов содержит НМ" ? В рамках теории НМ этот вопрос некорректен, поскольку нет четкой границы между принадлежностью и непринадлежностью элемента множеству. Поэтому введенное в работе [11] понятие ***мощности*** НМ: $|A| = \sum \mu_A(x_i)$ является естественным обобщением понятия числа элементов множества A. Его смысл состоит в определении эквивалентного числа единиц четкого множества, имеющего общий носитель с НМ, то есть в предположении, что нечеткости нет. Этот показатель может служить грубой оценкой степени нечеткости НМ (события в предметной области) – чем больше мощность, тем больше нечеткость.

*Расстояние между нечеткими множествами*

Понятие "расстояние d" между любой парой элементов x, y, z множества E (четкого или нечеткого) должно удовлетворять следующим условиям:

1) $d(x, y) \geq 0$ – неотрицательность,

2) $d(x, y) = d(y, x)$ – симметричность,

3) $d(x, z) \leq d(x, y) \otimes d(y, z)$ , где $\otimes$ – оператор, связанный с понятием расстояния.

4) $d(x, x) = 0$.

Из многих возможных определений расстояния между НМ, удовлетворяющим условиям 1) – 4), наиболее распространены следующие два:

а) Обобщенное расстояние Хемминга, или линейное расстояние

$d(A,B) = \sum |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$, где $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что $0 \leq d(A,B) \leq n$;

Обобщенное относительное расстояние Хемминга

$\delta(A,B) = d(A,B)/n$, имеет место $0 \leq \delta(A,B) \leq 1$;

б) Евклидово, или квадратичное, расстояние

$e(A,B) = \sqrt{\Sigma(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$ , где $i = 1, \ldots, n$. Имеем $0 \leq e(A,B) \leq \sqrt{n}$

Относительное евклидово расстояние

$\varepsilon(A,B) = e(A,B) / \sqrt{n}$; имеет место $0 \leq \varepsilon(A,B) \leq 1$.

Выбор той или иной метрики расстояния зависит от существа рассматриваемой задачи.

*Коэффициент корреляции между нечеткими множествами*

Классический коэффициент ранговой корреляции Кендалла определяется через расстояние между ранжировками [42]:

$\tau(P,Q) = 1 - 2\times d(P,Q) / d_{max}$

Выше упоминалось относительное расстояние Хемминга между НМ:

$\delta(A,B) = d(A,B)/n$

Так как для четкого случая $d_{max} = n$, мы можем вывести, что для НМ

$\tau(P,Q) = 1 - 2\delta.$ (1)

Поскольку значения ФП объектов можно ранжировать, автор предлагает выражение (1) трактовать как **коэффициент корреляции нечетких множеств P, Q**.

Этот коэффициент имеет логичную интерпретацию в терминах нечеткости:

$\tau(P,Q) = 0$, если $d=0.5d_{max}$. В этом случае средняя разность нечеткости объектов по двум признакам равна половине максимальной, то есть неясно, какой из признаков менее четкий.

$\tau(P,Q) = 1$, если $d=0$, – объекты "в среднем" неотличимы в пространстве двух нечетких признаков, то есть признаки коррелированы;

$\tau(P,Q) = -1$, если $d=d_{max}$; в этом случае нет нечеткости,
множества (признаки) не пересекаются.

Итак, коэффициент корреляции двух НМ может служить мерой их относительной нечеткости с содержательной интерпретацией значения этого коэффициента.

### 2.6. Показатели неопределенности нечетких множеств

В статье [11] впервые было предложено ввести показатель **неопределенности** для оценки и классификации объектов, описываемых нечетким множеством F.

Обозначим его v(F). Там же сформулированы основные свойства, которым должен удовлетворять этот показатель. Аксиоматика этих свойств изложена в [12].

Одна из аксиом очень характерна:

$v(F)$ максимален тогда и только тогда, когда все $\mu_F(x_i)=0.5$.

Это соответствует наиболее неопределенному значению ФП объектов - ситуация "не знаю".

Другая аксиома требует, чтобы было $v(F)=0$ тогда, когда F – обычное четкое множество.

Величина $\sup\{\mu_F(x_i)\}$ называется *высотой* НМ.

В некотором смысле эта величина тоже показывает размытость информации. Фактически это есть *мера возможности* события, семантика которого определена нечетким множеством.

В этой же статье было предложено и обосновано понятие *энтропии нечеткого множества*:

$Z(F)=h\times\Sigma\, S(\mu_F(x_i))$, где сумма вычисляется по всем элементам НМ,

h – положительная константа.

В качестве ядра S применяется известная в теории информации функция К.Шеннона:

$S(p) = -p\times\ln(p) - (1 - p)\times\ln(1 - p)$,

где p – вероятность некоторого события. То есть значения ФП, по определению находящиеся в диапазоне от 0 до 1, трактуются как вероятности.

Энтропия НМ удовлетворяет аксиоматике для v(F).

А.Кофман предложил в качестве показателя степени неопределенности НМ использовать следующий простой и логичный коэффициент:

$v(F) = (2/n) \times (\sum \min ( \mu_F(x_i), \mu_{\neg F}(x_i) ))$, где $i = 1, \dots, n$.

Коэффициент $v(F)$ равен 1, если все $\mu_F(x_i)=0.5$, то есть удовлетворяет основной аксиоме. Этот коэффициент находится в диапазоне от 0 до 1.

Кроме показателей неопределенности НМ применяются меры точности, называемые также **мерами специфичности** НМ.

Они определяются как функции из $[0,1]^X$ в $[0,1]$, которые монотонно убывают в смысле вложенности НМ, и максимальны лишь для одноточечных подмножеств базового множества. Примером является мера специфичности Р.Ягера [13]:

$Sp(F_n) = \sum_i ( (\mu_F(x_i) - \mu_F(x_{i+1})) / i )$, где $i = 1, \dots, n$.

Причем постулируется, что $|X|=n$; $\mu_F(x_{n+1})=0$.

Также принимается, что элементы множества X располагаются по убыванию значений $\mu_F(x_i)$ – в этом и состоит вложенность подмножеств НМ. Искусственный элемент n+1 со значением ФП=0 введен для общности вида формулы. Разность значений ФП соседних объектов взвешивается номером. Для одноточечного "множества" $Sp(F_n)=1$. Эта мера специфичности для разных НМ (при одинаковом числе n) будет больше у того НМ, у которого имеется большее количество сильно отличающихся соседних значений ФП – такое множество объектов легче разбивается на несколько классов.

Близкая по названной выше мере специфичности по отношению к числовым вариационным рядам разработана мера **λ-компактности** [14]. Эта мера вычисляется как отношение расстояния между объектами к минимальному из двух соседних расстояний.

Автор [43] применил эту меру для разбиения на три четких класса короткого числового вариационного ряда значений показателя теплового индекса биологических объектов с последующим вычислением значений ФП объектов к трем термам лингвистической переменной "холодовыносливость растений". Растения неоднозначно принадлежат к этим классам - "холодовыносливые", "теплолюбивые", "весьма теплолюбивые".

Применена авторскя гипотеза о переменной неразличимости объектов -

"если расстояние между объектами менее $D_{max}$ , то каждый из них принадлежит с некоторыми степенями к разным классам".

Этот способ отнесения новых объектов по измеренному значению теплового индекса к классам холодоустойчивости подтвержден специалистами ботаниками.

Способ не зависит от предметной области и может применяться для классификации объектов в случае коротких вариационных рядов, когда неприменимы статистические методы анализа.

### 2.7. Построение функций принадлежности нечетких множеств

Имеется ряд требований к процедурам построения (вычисления) ФП [13].

Так, опрос экспертов должен производиться при наличии ясной физической интерпретации понятия степени принадлежности, также не должно накладываться априорных ограничений на ответы (например, требовать транзитивности оценок). Количество вопросов к эксперту должно быть небольшим. Если число сравниваемых объектов велико (более 15, как установлено психологами), то практически единственным способом экспертных оценок является обсуждающийся ниже метод парных сравнений, в котором эксперту для сравнения по очереди предъявляются попарно все объекты.

К вопросу построения (вычисления) ФП ближайшее отношение имеет теория измерений во всех ее аспектах – от теории голосования, методы которой развивались еще Архимедом и Аристотелем, до современых теорий интервального анализа и планирования эксперимента. Важным вопросом при формализации прикладной задачи является выбор типа шкалы и связанных со шкалой группой допустимых преобразований измерений [44].

Основные типы шкал: абсолютная, наименований, порядковая, отношений, интервальная. Отметим, что в шкале наименований основой для четкой классификации объектов является только метрика (расстояние) Хемминга - [15, 16].

Некоторые методы построения ФП описаны в [17].

**2.7.1.** Пусть имеется коллектив экспертов, общее число которых обозначим n. Пусть a – число экспертов, ответивших положительно на вопрос о принадлежности элемента x к множеству A; b – число экспертов, ответивших отрицательно на тот же вопрос. Простейшим случаем является *частотная трактовка ФП*, однако при применении этого способа исследователю надо будет обосновать, почему он отказывается от методов математической статистики.

1. Пусть $n = a + b$.

Обозначим частотные вероятности $p = a/n$, $q = b/n$.

Введем энтропийную ФП: $\mu_A(x) = -p \log_2(p) - q \log_2(q)$,

которая семантически интерпретируется как "степень нечеткости события A", поскольку принимает максимальное значение 1 при $p = q = 1/2$, т.е. при максимальном разбросе мнений.

2. Пусть $n < a + b$. Это соответствует весьма важной реальности, когда экспертам разрешается относить объект (измерение параметра) к множеству A и к его дополнению одновременно. Обозначим число таких случаев $\neg A$ через $c$.

В качестве ФП к НМ можно применять известные коэффициенты сходства.

а) Отметим коэффициент сходства, предложенный польским математиком Я.Чекановским при обработке антропометрических данных и признаваемый биологами как один из лучших.

В соответствии с ним примем $\mu_A(x) = 2c/(a + b)$.

Эта ФП так же, как энтропийная, должна интерпретироваться как "степень нечеткости", т.к. принимает значение 1 при $c = a = b$.

б) Еще приведем признанный показатель Z биологического различия, мало известный в техничечских кругах – получаемый как корень решения уравнения Престона:

$$(a/s)^{1/Z} + (b/s)^{1/Z} = 1, \text{ где } s = a + b - c.$$

Этот показатель варьирует от 0 до 1, имеет пороговое значение 0.27, означающее, что при $Z < 0.27$ сходство преобладает над различием. Поэтому можно принять $\mu_A(x) = 1-Z$ как "степень нечеткости", по аналогии с 2а), хотя надо отметить некоторое неудобство этого показателя из-за его несимметричности относительно важного для ФП значения 0.5.

в) Широко распространен коэффициент сходства Жаккара:

$$K_J = c / (a + b - c).$$

Этот коэффициент очень логичен, поскольку представляет из себя отношение меры пересечения двух множеств к мере их объединения.

г) В процедурах классификации и распознавания образов широко применяется мера различия двух объектов (временных рядов) по числовым признакам:

$$F_k = (|m_k(A) - m_k(B)|) / (\sigma_k(A) + \sigma_k(B))$$

Здесь $k$ – индекс переменной, или признака;

A, B – обозначения двух объектов (классов);

$m_k$, $\sigma_k$ – среднее значение переменной $k$ и ее стандартное отклонение.

**2.7.2.** В биологии признан *индекс биотической дисперсии* как показатель сходства частичных серий описаний объектов двоичными (качественными) признаками с общим списком, включающем все объекты:

$$IBD_i = (T - S) / ((N_i - 1) \cdot S),$$

здесь $S$ – общее число признаков, применяемых для описания объектов;

$N_i$ – число объектов, включенных в серию $i$ ;

$T$ – сумма по всем объектам чисел признаков, которыми обладает каждый объект рассматриваемой серии (сумма единиц двоичной матрицы инцидентности).

Этот коэффициент вводится в предположении о равноценности двоичных признаков, характеризующих всю совокупность объектов. Его величина варьирует от 0 до 1 и является мерой сходства выбранной совокупности объектов со всем множеством (генеральной совокупностью) объектов.

При i={1,2} этот коэффициент превращается в коэффициент сходства Жаккара – мера сходства двух объектов, характеризующихся двоичными свойствами. Коэффициент Жаккара равен дополнению до единицы относительного расстояния Хемминга. Можно сказать, что для двух объектов он "морально устарел", но расстояние Хемминга не определено для групп списков, тем более разной длины, как допускает коэффициент $IBD_i$, поэтому применение последнего вполне актуально.

Вообще отметим, что применяемые в методах распознавания образов коэффициенты сходства (различия) объектов могут служить основой для вычисления ФП [45]. Таких обоснованных коэффициентов имеется несколько десятков, многие из них обсуждаются в работах [18, 19]. Меры сходства, основанные на евклидовом расстоянии, описываются в книге [20]. Обзор мер сходства по двоичным признакам приведен в [21].

**2.7.3.** В работе [13] вместо прямого назначения экспертом величины ФП объекта к НМ по числовому признаку предлагается *определение уровневых множеств*.
А именно, интервал значения признака разбивается на необходимое число равных частей. Затем случайным образом, без возвращения, выбираются по одному значению признака из каждого интервала. Затем экспертно относят к интервалам объекты из универсума, "близкие"

по значению к случайным числам, представляющим интервалы. Транзитивность этой процедуры будет обеспечена тем, что числовые образы (представители интервалов) определяются однократно, без возвращения. В заключение подсчитываются частотности в интервалах, затем они упорядочиваются по возрастанию и принимаются как $\alpha$-срезы НМ.

Отличие этого способа от простого гистограммного определения частотных вероятностей состоит в том, что числовой признак (критерий) в способе Р.Ягера может быть трудноформализуемым неметрическим признаком, например, балльной оценкой.

**2.7.4.** Доказанной [22, 23] является процедура нахождения ФП на основе *парных сравнений степеней принадлежности объектов*. По результатам опроса эксперта(ов) формируется квадратная обратносимметричная матрица $||m_{ij}||$, $i,j = 1, \ldots, n$,
где n – число точек (объектов), в которых сравниваются значения ФП. Числа $m_{ij}$ показывают, во сколько раз, по мнению эксперта, $\mu_A(x_i)$ больше $\mu_A(x_j)$. По определению принимается $m_{ii} = 1$
и $m_{ij} = 1/m_{ji}$. При этом число вопросов (сравнений) составляет $(n^2 - n)/2$.

Числа для степеней сравнения применяются не произвольные, а из универсальной психофизиологической шкалы, принятой в науке в результате большого количества экспериментов за примерно 150 лет. Наибольший вклад в исследование вопроса о соотношении стимула и реакции человека внесли Э.Вебер (1795–1878), Г.Фехнер (1801–1887), С.Стивенс (1906–1973). Признано, что человек оперирует практически не более чем 9 степенями сравнения какого-либо свойства объекта с эталоном или двух объектов между собой; практически достаточно 5 степеней, а для грубой оценки даже 3.

Ниже приведена таблица интерпретации значений $m_{ij}$ как результата парного сравнения ФП двух объектов (явлений).

Баллы универсальной шкалы - Таблица 1

| Смысл сравнения | $m_{ij}$ |
|---|---|
| $\mu_A(x_i)$ равно $\mu_A(x_j)$ | 1 |
| $\mu_A(x_i)$ немного больше $\mu_A(x_j)$ | 3 |
| $\mu_A(x_i)$ больше $\mu_A(x_j)$ | 5 |
| $\mu_A(x_i)$ заметно больше $\mu_A(x_j)$ | 7 |
| $\mu_A(x_i)$ намного больше $\mu_A(x_j)$ | 9 |

Получаемая в методе парных сравнений положительная обратносимметричная матрица $M = || m_{ij} ||$ используется в уравнении, в ходе решения которого определяются значения ФП

$\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$M\Phi^T = \lambda_{max}\Phi$ , где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ – вектор искомого решения длиной n;

$\lambda_{max}$ – максимальное собственное число матрицы M, $^T$ – символ транспонирования.

Решение этого уравнения единственное:

$\mu_A(x_i) = \Phi_i / \sum_i \Phi_i$ $(i=1, \dots, n)$.

Во многих задачах можно ограничиться экспоненциальными, параболическими ФП.

Часто исследование можно начать с простейших трапециевидных или треугольных ФП, поскольку подгонка вида ФП – это уже уточнение алгоритма решения.

**2.7.5.** Автором предлагается весьма логичный и простой *способ процентильного задания значений границ* функций принадлежности термов лингвистической переменной по экспериментальному числовому вариационному ряду:

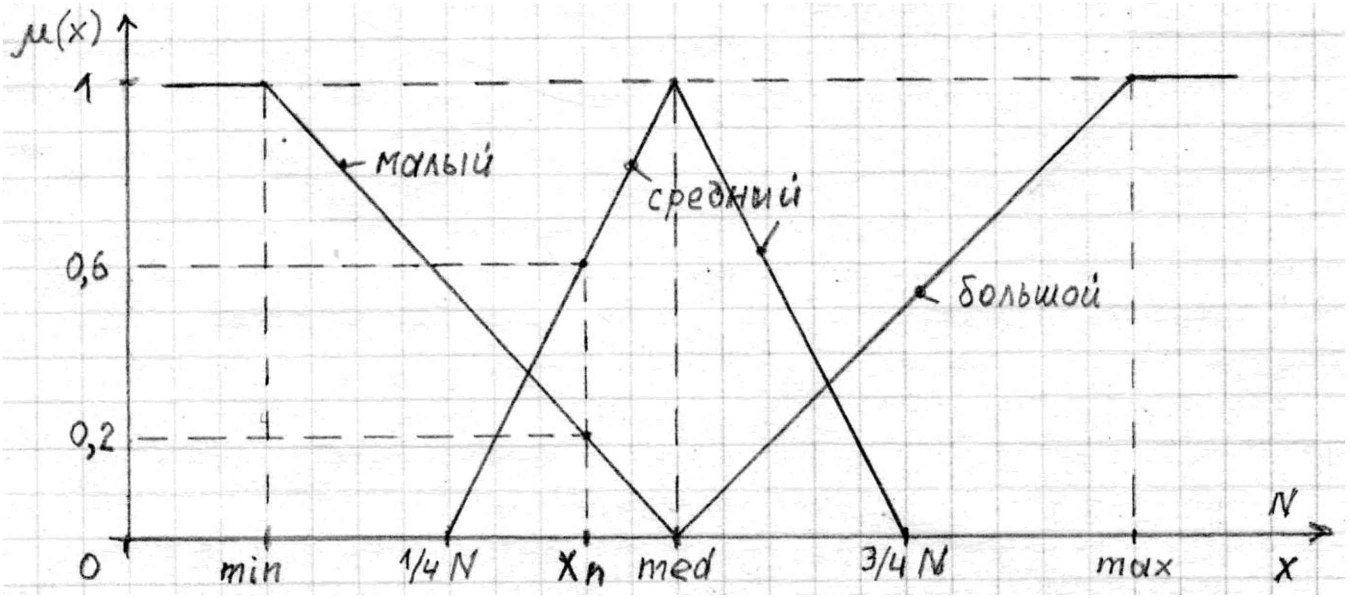


Рис. 3

Также вычисление границ ФП по вариационному числовому ряду можно производить по изложенному выше модернизированному способу вычисления меры λ-компактности.

### 2.8. Способы преобразования числовых и номинальных списковых признаков в значения ФП для случая многомерного пересечения классов объектов (см. рис. 2)

Многозначность объектов-таксонов проявляется в наличии нескольких единиц (у каждого таксона свое количество) в строках двоичной матрицы инцидентности (ТЭД) объект-признак. Степени этой многозначности, или "размазанность" таксонов по значениям разнотипных признаков необходимо вычислить как значения функций принадлежности таксонов к нечетким множествам.

#### 2.8.1. Числовые списковые признаки

Семантика нечеткости – в степени многозначности объектов по значениям числовых признаков. Основной способ опирается на построение мер необходимости и возможности некоторых событий [4]. Основные понятия этих мер показаны в п.2.3.

В отличие от вероятностных мер, отражающих точные и дифференцированные знания, меры возможности и необходимости отражают неточные, но связанные каким-либо отношением знания. В этом способе вводится понятие *фокальных элементов* (ФЭ), или подмножеств, связанных отношением "быть больше". Фокальные элементы - это четкие вложенные множества, определенные ранжированием по назначенным значениям числового признака.

Если бы числовые признаки объектов не были многозначными, то совокупность фокальных элементов превратилась бы в стандартную гистограмму.

Автором предложен уточненный способ для вычисления ФП многозначных (списковых) числовых объектов к НМ [24]. А именно, для построения мер необходимости предлагается формулировка двух противоположных событий для группирования числовых многозначных объектов. Такой подход позволяет получить две фокальные последовательности для каждого из объектов-таксонов, заданных ТЭД.

Первое - отношение порядка для построения вложенных ФЭ-подмножеств установим определением события "быть меньше K или равно K", где K – целые числа. Целочисленные значения границ ФЭ не являются требованием алгоритма вычисления ФП, а лишь отражают особенность предметной области (это вопрос выбора масштаба единицы измерения). Множественное отношение вложенности при этом обеспечено:
если объект имеет, скажем, значение "2 или меньше" некоторого признака, то из этого следует "3 или меньше", "4 или меньше" и так далее. Таким образом формируются фокальные элементы $A_1$ – An. Разность мощностей соседних ФЭ обозначим ml(K) – разность частот слева. Интересующими нас событиями, характеризующимися необходимостью, или нижней оценкой вероятности $P_1$, является "равно K или меньше K", а также "равно K". Тогда нижняя (по Демпстеру) оценка $P_1$ для события, например, "3 или меньше", соответствующего ФЭ $A_4$, определится относительной суммой ml(1)+ml(2)+ml(3), то есть кумулянтой тех событий, которые делают необходимым событие $A_4$.

Второе - постулатом противоположного по отношению к событию "быть меньше K или равно K" является событие "быть больше K".
По этому событию строится другая фокальная последовательность – четкие подмножества исходного множества $B_1$ – Bm. Эти подмножества требуются для вычисления

верхних (по Демпстеру) вероятностей $P_2$. В подмножествах $B_1$ – $B_m$ также соблюдается строгая вложенность, поскольку очевидно, что из условия "больше 5" следует "больше 4", "больше 3", и так далее. Их разности мощности обозначим mr(K) – разность частот справа.

В работе Dubois D., Prade H. [38] обосновывается вычисление ФП элементов универсального множества X к нечеткому множеству:

$$\forall\ x,\ \ \mu_F(x) = \sum m(A_j)\cdot T_j(x)\ , \qquad (1)$$

где $T_j(x)$ – характеристическая функция принадлежности элемента x к четкому фокальному подмножеству $A_j$. Значения ФП, вычисленные по (1), представляют собой нижние оценки необходимости принадлежности элементарных объектов x к НМ F, т.е. построение по (1) отражает необходимую (гарантированную) степень нечеткости.

По мерам необходимости ml(K) и mr(K), в соответствии с (1), можно построить функции принадлежности объектов к двум нечетким множествам $\mu_L(x)$ и $\mu_R(x)$.
Назовем их "нечеткость слева" и "нечеткость справа". Эти два НМ, в равной степени представляющие нечеткие объекты, появились из-за того, что признак числовой (порядковый), и по нему было установлено две формулировки противоположных событий –
"быть меньше K или равно K" и "быть больше K". Множества L и R были построены по необходимым (гарантированным) фокальным мерам значений признака, поэтому для их свертки применим операцию объединения, чтобы не уменьшать эти гарантированные меры.
В теории НМ этот эвристический прием соответствует принципу обобщения Л.Заде.
Таким образом получаем общее НМ V:

$$\mu_V(x) = \mu_{L\cup R}(x) = \max\{\mu_L(x),\ \mu_R(x)\}, \quad x \in X.$$

Итоговое нечеткое множество V учитывает и многозначность объектов и отношения "больше – меньше" между объектами по обеим формулировкам по значению признака, то есть используется максимум исходной информации.

Полученное для каждого объекта-таксона значение ФП $\mu_V(x)$ отражает гарантированную степень его принадлежности к НМ, то есть его нечеткость, с учетом всей таблицы исходных данных. Поэтому чем больше значение $\mu_V(x)$, тем хуже распознается будущий исследуемый объект по этому числовому признаку. Дополнение к нечеткому множеству V (множество $\neg V$) показывает степень различимости (специфичности) объектов-таксонов по анализируемому показателю, поэтому назовем его функцию принадлежности двусторонним коэффициентом предпочтения диагноза многозначного объекта по числовому признаку:

$$\mu_F(x) = 1 - \mu_V(x) \qquad (2)$$

По формуле (2) вычисляются значения ФП к НМ всех объектов-таксонов по всем числовым признакам. Эти значения ФП могут использоваться в последующем многомерном нечетком анализе.

### 2.8.2. Номинальные списковые признаки

Семантика НМ – чем больше многозначность (длина списка) признака объекта-таксона, тем менее надежно диагностируются по этому признаку его представители.

В отличие от числовых признаков, по значениям номинальных невозможно построить вложенные подмножества объектов (определить отношение порядка для получения меры необходимости значения признака).

Многозначные номинальные признаки в ТЭД таксона являются списками, а у конкретного диагностируемого объекта значение признака будет одним элементом из этого списка, то есть в процессе диагностики реализуется одно из нескольких возможных событий, поэтому вычисление ФП объектов ТЭД к НМ по номинальным признакам производится на основе мер возможностей значений признаков.

Известен подход Г.Шефера [3], развитый в работах [4, 25], в котором требование полноты группы несовместных событий заменяется распределением единичной "массы уверенности" на все возможные события (значения признака). Воспользуемся этим подходом для вычисления значений ФП многозначных объектов-таксонов к НМ на основе мер возможностей значений этого признака.

А именно, для номинального признака сумма единиц в двоичной матрице инцидентности $||x_{ni}||$ "объект–значение признака" (n – индекс объекта, i – индекс значения признака в ТЭД) рассматривается как "масса размытости C всех значений признака по всем объектам". Распределение долей этой массы соответствует распределению меры возможности конкретного значения признака (нечеткого события) в смысле Шефера :

$$q(C_i) = \Sigma_n\, x_{ni} \,/\, \Sigma_{n,i}\, x_{ni} \qquad (1)$$

Вычисление ФП объектов универсума X к нормальному НМ по мере возможности событий (значений признака) обосновано в работе Дюбуа Д., Прад А. [4]:

$$\forall\ x,\ \ \mu_A(x) = \Sigma\, q(C_i)\times T_i(x)\ , \qquad (2)$$

где $T_i(x)$ есть характеристическая функция соответствия объекта и значения признака (элементы матрицы $||x_{ni}||$ в ТЭД отдельного номинального признака).

Выражение (2) означает переход от модальной логики $T_i(x)$ двоичных данных ТЭД таксона к нечеткому множеству посредством весовой функции $q(C_i)$, соответствующей постулату Шефера о единичной "массе уверенности", распределенной на универсуме:

$$\sum q(C_i) = 1$$

Дополнительное нечеткое множество F, означающее степень специфичности (распознаваемости) многозначного объекта ТЭД-таксона в пространстве терм-множества номинального признака, вычисляется, как обычно:

$$\mu_F(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (3)$$

Итак, вычисление ФП объектов ТЭД-таксонов к НМ для номинальных признаков производится по выражениям (1), (2), (3). Это означает ранжирование объектов ТЭД по степени четкости их представления рассматриваемым признаком, что соответствует преобразованию номинальной шкалы в новую числовую интервальную шкалу с семантикой нечеткого множества "специфичность многозначного объекта ТЭД по совокупности возможных значений номинального признака".

Ранжирование многозначных объектов по значениям $\mu_F(x)$ по выражению (3) можно представить и с другой позиции. А именно, эти значения ФП, находящиеся в пределах от 0 до 1, удовлетворяют свойствам так называемого изотонического показателя [26], или потенциала данного объекта в рассматриваемой совокупности объектов. Этот показатель не сохраняет структуры свойств объектов (безразлично, из принадлежности к каким значениям номинального признака набран "общий вес" каждого объекта) и учитывает только уровень значений нечеткости. Равные значения изотонического показателя образуют изокванты Хельвига, которые объединяют объекты, равноудаленные от начала координат в смысле метрики расстояния "city-block" (манхэттенское), это частный случай метрики Минковского, оперирующей с функцией от модуля разности многомерных расстояний.

Таким образом, $\alpha$–срезы НМ, образованного по выражению (2), являются изоквантами Хельвига, что дает теоретическое обоснование для последующей классификации объектов, представленных матрицей расстояния $d_{ij} = |\mu_A(x_i) - \mu_A(x_j)|$.

Этот же подход изоквант Хельвига, или $\alpha$–срезов НМ, можно применить и к многозначным числовым признакам, рассмотренным выше.

Алгоритм вычисления ФП номинальных списковых объектов описан в работах [27, 28].

### 3. Нечеткий вывод, примеры

Используемый в экспертных и управляющих системах механизм нечеткого логического вывода зачастую основан на базе знаний, сформированной специалистами предметной области в виде совокупности нечетких предикатных правил:

$П_1$: если x есть $A_1$, то y есть $B_1$,

$П_2$: если x есть $A_2$, то y есть $B_2$,

………………………………………….

$П_n$ если x есть $A_n$, то y есть $B_n$, ,

где x - входная переменная, y - переменная вывода;

$A_n$ , $B_n$ - функции принадлежности, определенные на множествах X и У.

Общий логический вывод осуществляется за следующие четыре этапа: [2, 31].

1. **Нечеткость** (введение нечеткости, fuzzification). Определяются ФП для входных переменных - предпосылки каждого правила.

2. **Логический вывод**. Вычисленное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. В качестве правил вывода обычно используются операции МИНИМУМ или УМНОЖЕНИЕ. В логическом выводе "МИНИМУМ" ФП вывода "отсекается" по высоте, соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила (логическая функция "И").

3. **Композиция**. Все НМ, назначенные к каждой переменной вывода во всех правилах, объединяются по всем правилам, чтобы сформировать одно НМ для каждой переменной вывода. При объединении используется принцип обобщения Заде - операция МАКСИМУМ, или СУММА. При композиции " МАКСИМУМ" вывод нечеткого подмножества конструируется как максимум по всем НМ вывода (логическая функция "ИЛИ").

Для реализации пунктов 2), 3) имеется много алгоритмов, например, алгоритм Mamdani, алгоритм Tsukamoto, алгоритм Sugeno, и другие.

4. **Приведение к четкости** (defuzzification). Используется для преобразования нечеткого вывода в четкое число - ответ, или цель поставленной задачи.
Имеется большое количество методов дефаззификации, например, метод центра тяжести, первый максимум, средний максимум, высотная дефаззификация (выше некоторого $\alpha$-уровня).

### 3.1. Упрощенный алгоритм вывода

Пусть в простейшем виде база знаний состоит из двух правил:

ЕСЛИ X есть Большое, ТО Y есть Большое

ЕСЛИ X есть Малое, ТО Y есть Малое

Примем линейные функции принадлежности для нечетких множеств обеих переменных. Сложность исходной задачи оценки выхода y состоит, например, в том, что функциональная зависимость y от x может быть сложной нелинейной, или даже неизвестной. Известны только максимальные и минимальные значения (ограничения) переменных x, y.

Отобразим ФП нормированных числовых переменных x, y на графиках:

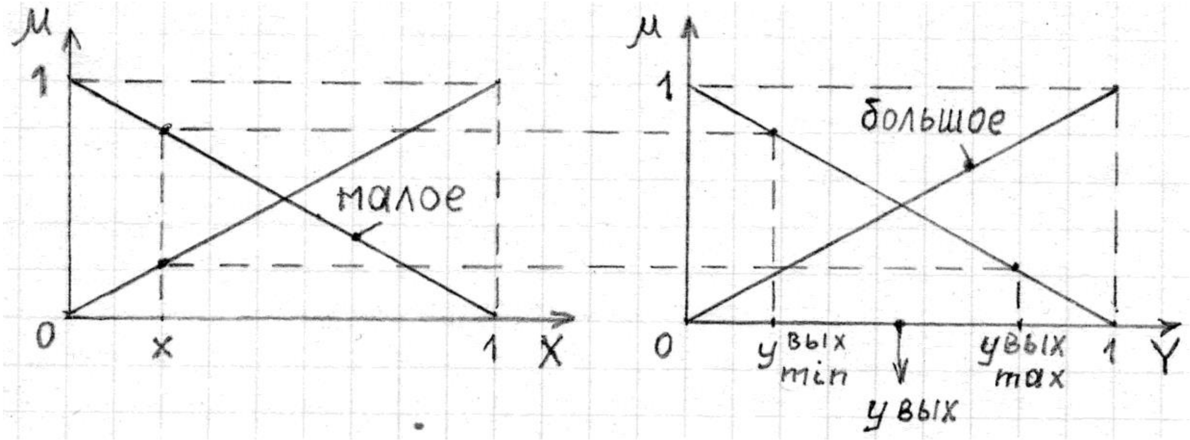


Рис. 4

При задании в эксперименте конкретной величины входа x получаем диапазон возможных значений выхода и конкретный ответ (дефаззификация) как половина этого диапазона.

### 3.2. Алгоритм Мамдани

Пусть, как в предыдущем примере, база знаний состоит из двух правил в предметной области – автоматизация управления автомобилем:

$П_1$: Если скорость большая, То уменьшить газ

$П_2$: Если дорога в гору, То увеличить газ

Подача газа оценена как расстояние до верха педали газа от пола (в сантиметрах, см. Рис. 5).

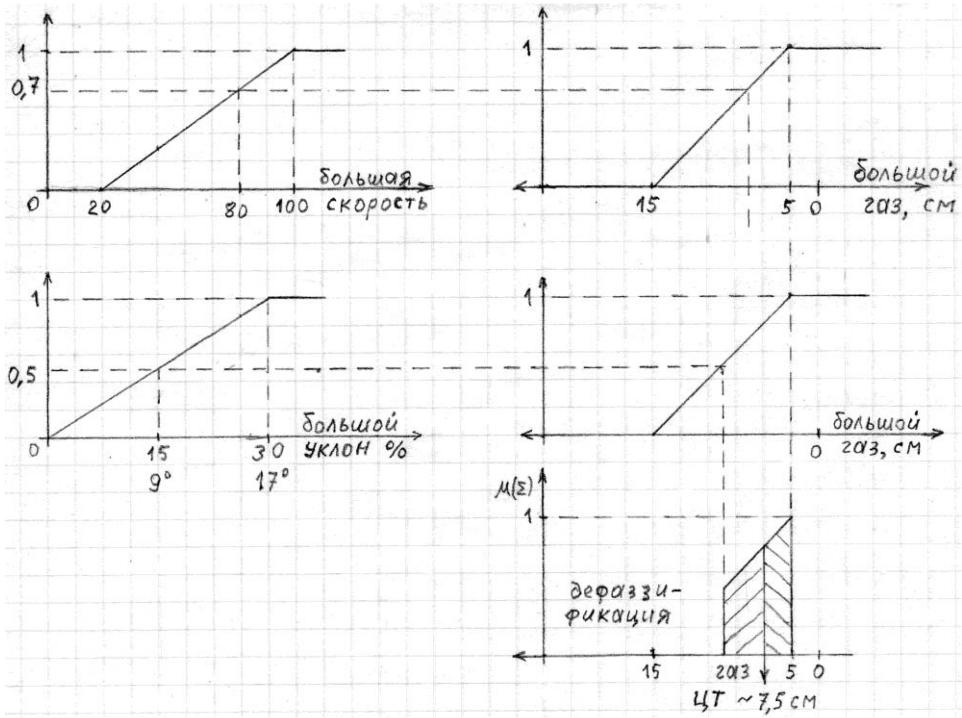


Рис. 5

По пунктам общего алгоритма нечеткого вывода:

1) Находятся ФП для предпосылок каждого правила.

2) Находятся уровни "отсечения" для предпосылок обоих правил (операция min).

3) С использованием операции max объединяются усеченные ФП – получается итоговое НМ для переменной выхода.

4) Приведение к четкости методом центра тяжести.

### 3.3. Линейная нечетко-интервальная регрессионная модель

Многие реальные задачи сводятся к моделированию больших нелинейных систем с разнотипными переменными. Для решения таких задач акад. А.Г.Ивахненко предложил групповой метод обработки данных (ГМОД). Этот метод не требует априорных знаний о структуре системы и позволяет моделировать систему по входным и выходным данным. В его основе используется линейная интервальная регрессионная модель, в которой выходной интервал представляется как

$$Y = A_1x_1 + \dots + A_nx_n,$$

где $x_i$ – известные переменные; $A_i$ – интервалы.

Можно усовершенствовать эту модель, а именно, принять нечеткое описание интервала $A_i = (a_i, c_i)$ как треугольную ФП, где $a_i$ – центр интервала, $c_i$ – ширина интервала. В этом случае интервальный выход Y вычисляется следующим образом:

$$Y = (\Sigma a_i \cdot x_i,\ \Sigma c_i |x_i|) = (ax, c|x|), \qquad (1)$$

где $a=(a_1, \dots , a_n)$, $c=(c_1, \dots , c_n)$, – векторы-строки, $x=(x_1, \dots , x_n)^t$ – вектор-столбец.

Пример: на входе две переменные $x_1=2$, $x_2=-1$;
коэффициенты-параметры с нечеткими треугольными интервалами: $a_1=3$, $c_1=1$; $a_2=4$, $c_2=2$.

По формуле (1) получаем центр выхода $y_a= a_1\times x_1+a_2\times x_2= 3\times 2 - 4\times 1 = 2$,
и его ширину $y_c =c_1\times|x_1|+c_2\times|x_2| = 1\times 2 + 2\times 1 = 4$.
В этом примере нечеткого подхода с симметричными треугольными ФП получена оценка выхода, более адекватная исходным данным, чем при применении интервального анализа по Ивахненко.

### 3.4. Алгоритм надежного распознавания для случая пересекающихся классов

Рассматривается случай нечеткой (толерантной) классификации объектов предметной области в многозначном (списковом) числовом и качественном признаковом пространстве, когда значения признаков относят конкретный объект не к одному, а к нескольким разным классам (таксонам), по Рис.2.

Автором разработан *универсальный алгоритм* и диалоговая программа для распознавания (диагностики) объектов в таких условиях реальных задач различных предметных областей. Алгоритм проверен для задачи надежной диагностики растений по отношению к ботаническим семействам.

Двоичная ТЭД содержала сведения о 102 семействах растений Сибири (таксонах) по 11 многозначным (списковым) количественным и качественным признакам. Признаки следующие: Количественные - числа лепестков, пестиков, столбиков, тычинок.
Качественные - типы завязи, листьев, плода, гинецея, околоцветника, соцветия, размножения.

Например, значениями признака типа плода могут быть -
орешек, листовка, семянка, коробочка, костянка, боб, стручок, ягода.
Представители многих из 102 семейств имеют соответствие к нескольким значениям из названного списка типа плода, что как раз определяет факт пересечения классов-таксонов.
По другому признаку, например, значение типа листьев "супротивные" имеют три семейства: Geraniaceae, Primulaceae, Scrophulariaceae.

Отметим, что исходные списковые данные по значениям признаков классов объектов всегда можно представить как двоичную матрицу инцидентности "объект-свойство" ТЭД (таблица экспериментальных (экспертных) данных). Для числовых признаков нужно произвести разбиение на такие интервалы (дискретизацию), какие соответствуют существу предметной области.
По двоичной ТЭД *вычисляются значения ФП всех признаков* по способам, описанным в пункте 2.8. В итоге полученные по всем признакам решетчатые ФП объектов-таксонов сводятся в числовую матрицу "надежность диагноза": $U=||\mu_{nm}(x)||$

Здесь n – индекс объекта-таксона, m – индекс признака.

*Способы свертки* матрицы "надежность диагноза" нечетких множеств.
Цель многомерного нечеткого вывода – нахождение минимального по некоторому критерию пути для диалогового диагноза объекта (устройства) – может быть достигнута в результате анализа матрицы U по строкам и столбцам.

Свертка матрицы U по строкам-таксонам означает итоговое ранжирование разнотипных признаков классов-таксонов по степени надежности для диагноза предъявляемого образца.

Свертка по столбцам дает итоговый числовой критерий для ранжирования многозначных объектов-таксонов по совокупности разнотипных признаков. Первый таксон в этом ранжированном списке как раз является текущим предпочтительным диагнозом для предъявленного образца в диалоговом алгоритме диагностики (диагностика производится по очередному списку ранжированных разнотипных признаков).

Полученная матрица U нетранзитивна по НМ-признакам, поэтому определение наилучшего признака для очередного диагностического вопроса в диалоговом алгоритме является решением задачи группового выбора. Известна теорема К.Эрроу [32], согласно которой не существует в общем случае решения этой задачи при числе признаков-вариантов больше двух и при выполнении условий нескольких естественных аксиом.

Поэтому для решения необходимы некоторые упрощающие условия, или эвристики, каковыми являются примененные в алгоритме три способа многокритериального выбора.

В программе диагностики, реализующей разработанный алгоритм, пользователь может выбрать любой из этих способов, а по умолчанию установлена осторожная стратегия.

*Рискованная* стратегия, или экстремальный выбор.

Этот принцип, применяемый в теории игр, состоит в том, что из нескольких альтернатив выбирается та, которая имеет абсолютный максимум критерия. Реализация этой стратегии осуществляется ранжированием НМ-признаков по убыванию максимальных значений

ФП каждого НМ, то есть исходная матрица $||\mu_{nm}(x)||$ сворачивается по строкам операцией

$$S_m=\max_n\{\mu_{nm}(x)\},$$

и остается вектор-строка $|S_m|$ из $m$ значений. Максимальный элемент этого вектора соответствует тому признаку ТЭД, по которому надлежит задать вопрос на очередном шаге диалоговой программы, реализующей алгоритм диагностики.

*Усредненная*, или осторожная стратегия выбора

Эта стратегия является фактически процедурой Ж.-Ш. де Борда обработки результатов голосования [29]. Она требует от избирателей упорядочения всех предъявляемых вариантов по предпочтению. Числовая матрица U, элементы которой можно считать дробным "числом голосов", поданных таксонами-избирателями за каждый из $m$ признаков-вариантов, обеспечивает это сравнение признаков. Вычисляемые по каждому столбцу-признаку суммы

$$S_m=\sum_n \mu_{nm}(x)$$

ранжируются по убыванию, что и определяет ранжирование исходных признаков-вариантов по степени их априорной прогнозной способности. В программе диагностики на очередном шаге рекомендуется применять признак-победитель, соответствующий сумме $S_1$.

Выбор по *минимуму коэффициента нечеткости* НМ.

Известен коэффициент нечеткости НМ А.Кофмана:

$$v(F) = (2/N)\cdot(\sum \min(\mu_F(x_n), \mu_{\neg F}(x_n))).$$

Используется следующая эвристика: чем меньше коэффициент $v(F_m)$,

тем лучше соответствующий признак m подходит для диагностики.
В алгоритме применяется равноценное, по сравнению с выражением для v(F), ядро -

$|\quad \mu_F(x_n)-(1-\mu_F(x_n))|$,

на основе которого можно получить расстояние Хемминга-Заде между НМ и его дополнением:

$$D_m = \sum_n |\mu(x_{nm}) - (1-\mu(x_{nm}))|.$$

Оптимальным для очередного шага диагностики считается тот признак m, который имеет максимальное значение $D_m$. Это соответствует минимуму нечеткости по Кофману, то есть объекты-таксоны менее всего пересекаются по градациям значений этого признака,
по сравнению со всеми другими признаками.

*Алгоритм работы программы диагностики объекта (процесса)*

Сходимость диалогового алгоритма диагностики предопределена по той причине,
что в таблицах экспериментальных (экспертных) данных должны быть учтены все возможные проявления значений признаков у потенциальных к распознаванию образцов. Это требование означает тщательную проработку постановки задачи в предметной области. Такое полное описание признакового пространства задачи диагностики как раз приближает к реальному процессу моделирования работы устройств (объектов), допуская пересечения и разрывы классов состояний устройств в многомерном разнотипном признаковом пространстве.

Программа диагностики циклически выполняет три основных блока:

1) Для каждого из классов (кандидатов на диагноз) состояний устройства, оставшихся после очередного цикла программы (в начале работы это все возможные классы),

вычисляются значения ФП признаков к НМ.

2) Решается задача группового выбора очередного признака-вопроса, то есть ранжирование признаков по критерию априорной надежности диагноза объекта (состояния) относительно оставшихся после шага 1) таксонов. Программа выдает список признаков, ранжированный по убыванию вычисленного критерия надежности диагноза. Пользователь может не следовать рекомендации алгоритма и выбрать не первый, а любой признак из списка, например, в учебных целях, или для тестирования, или используя наиболее выраженный признак, но длина ключа диагностики при этом может возрасти.

3) Программа выдает список значений того признака, который пользователь выбрал в п. 2) алгоритма. После этого пользователь, сверяясь с реальным состоянием диагностируемого объекта (устройства), должен указать одно значение из списка. Здесь возможен ответ "не знаю". Программа при этом переходит к п. 1). Возможность ответа "не знаю" является важным достоинством алгоритма – процесс диагностики становится надежным (устойчивым к сомнениям пользователя или сбоям системы регистрации параметров процесса).

Далее, в соответствии с ответом пользователя и исходной ТЭД, программа производит ограничение множества классов-кандидатов на диагноз (отбрасываются невозможные таксоны), затем осуществляется переход к п. 1), и так далее, до одного кандидата, который является ответом (диагнозом), либо до появления противоречий в ответах пользователя о значениях признаков устройства (в ТЭД нет такого класса).

Все остающиеся после шага 3) работы программы таксоны-кандидаты ранжированы по убыванию итогового (многомерного) коэффициента надежности диагноза.

Поэтому, если в конце работы (при исчерпании всех вопросов о значениях признаков) останется несколько таксонов-кандидатов, то первый в списке является самым предпочтительным. Такая ситуация может возникнуть, если пользователь часто отвечал "не знаю" на вопросы о значениях признаков. Визуализация на каждом цикле ранжированного списка таксонов-кандидатов на диагноз может быть использована в учебных целях, при создании тренажеров.

### *Заключение*

Разработанный метод диагностики многомерных разнотипных объектов по отношению к пересекающимся классам был применен для диагностики растений – определения семейств растений (гербарных образцов) [30]. Программа RECOFAM©, реализующая алгоритм, использовалась в учебном процессе в трех университетах на кафедрах ботаники как тренажер для студентов и аспирантов.

Алгоритм диагностики неспецифичен к предметной области, так как работает с абстрактными безразмерными функциями принадлежности объектов к НМ. Поэтому этот метод диагностики применим в различных областях науки и техники.

Для диагностики технического состояния устройств или процессов, в том числе выявления неисправностей, в предметной области требуется составить таблицу экспериментальных (экспертных) данных, описывающую классификацию возможных состояний устройства или процесса, без ограничения на признаковую многозначность таксонов – допустимо пересечение классов как на Рис. 2.

Далее, в процессе эксплуатации оборудования, снимаются показания с датчиков параметров работы устройств, дополнительно возможны экспертные суждения обслуживающего персонала. Затем программа в диалоговом режиме выявляет наибольшую близость текущего состояния устройства к какому-либо классу из возможных состояний, то есть "ставит диагноз".

В алгоритме нет ограничений на количество классов-таксонов и количество применяемых количественных и качественных признаков. Алгоритм не сбивается при отсутствии значения какого-либо признака, то есть допускается ответ "не знаю" на вопрос программы.
Это важное для эксплуатации свойство алгоритма может отражать проблемы регистрации некоторого параметра устройства, например, неисправность датчика,
дороговизну или длительность эксперимента и т.д.

Диалоговый характер программы диагностики позволяет создавать учебные тренажеры
по изучению сложной техники, имитации аварий. Диалог с программой может быть автоматизирован по разработанному сценарию, что позволяет встраивать алгоритм
в безлюдные системы управления объектами, создавать "умные приборы".

***Благодарю за внимание !***

## Литература


1. Лотфи Заде https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B5,_%D0%9B%D0%BE%D1%82%D1%84%D0%B8
2. Zadeh L. Fuzzy sets // Inf. Contr., 1965. N 8, - p. 338-353.
3. Dempster A.P Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping // Ann. of Math. Statistics -1967, vol.38, pp. - 325-339.
4. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М.:Радио и связь, 1990. - 288 с.
5. Zadeh L. Fuzzy sets as a basis as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems, 1978, N 1. - p. 3-28.
6. Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1986, N5. - с. 3-28.
7. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. –М.: Мир, 1987. – 360 с.
8. Rocha L.R., Kreinovich V., Kearfott R.B. Computing uncertainty in interval based sets / Applications of Interval Computations. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996. – Pp. 337-380.
9. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений - М.: "МИР", 1976. - 166 с.
10. Заде Л. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе: // Классификация и кластер. – М., 1980. с. 208-247.
11. De Luca A., Termini S Entropy of L-fuzzy sets / Information and Control, 1974, v. 24. - pp. 55-73.
12. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М., 1982. - 432 с.
13. Ягер Р. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. – М., 1986. - 406 с.
14. Загоруйко Н.Г. Гипотезы компактности и $\lambda$-компактности в методах анализа данных // Сибирский журнал индустриальной математики, т.1, N 1. – Новосибирск, 1998. – с. 114-126.
15. Пфанцагль И. Теория измерений. – М., 1976. - 248 с.
16. Фишберн П.К. Измерение относительных ценностей / Статистическое измерение качественных характеристик. – М., 1972. – с. 35-94.
17. Аверкин А.Н. и др Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А.Поспелова.– М., 1986. – 312 с.
18. Миркин Б.Г Анализ качественных признаков и структур – М., 1980. – 319 с.
19. Мэгарран Э. Экологическое разнообразие и его измерение. М., 1992. – 184 с.
20. Дюран Б., Оделл П. Кластерный анализ. – М., 1977. – 128 с.
21. Высокос Г.Н. Обзор мер сходства для бинарных свойств / Математические методы при поиске и разведке полезных ископаемых. Всесоюзная конф., сб. научных трудов. – ВЦ СО АН, Новосибирск, 1978. – с. 114-123.
22. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М., 1993.
23. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М, 1991. – 224 с.
24. Красинский В.И. Применение теории возможностей для ранжирования многозначных ботанических объектов // Автометрия, 1999, N 3. – с. 65-81.
25. Resconi G. Uncertainty Theories by Modal Logic / Computational Intelligence: Soft Computing and Fuzzy–Neuro Integration with Applications. - Springer, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 162. 1999. – Pp. 60-79.
26. Плюта В. Сравнительный многомерный анализ в эконометрическом моделировании. – М., 1989. – 176 с.

27. Красинский В.И. Классификация биологических объектов по совокупности списковых признаков переменной длины (на основе нечетких множеств) // Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000). Тез. докл. Ч. III.– Новосибирск, Изд. ин-та математики СО РАН, 2000. – с. 65.
28. Красноборов И.М., Красинский В.И. Применение теории нечетких множеств для определения семейств растений // Доклады Академии наук, 2000. Том 374, N 4. – С. 565-567.
29. Вольский В.И., Лезина З.М. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа – М., 1991. – 192 с.
30. Красинский В.И. Распознавание растений по разнотипным признакам на пересекающихся классах-таксонах / Всерос. конф., посвященная 90-летию А.А.Ляпунова. СО РАН, Новосибирск, 2001.
31. Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. - М., 2001. - 224 с.
32. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы) // Автоматика и телемеханика, 1983, N 9. – с. 127-151.
33. Крамер Г. Математические методы статистики – М., 1976. – 648 с.
34. Кузьмин В.Б. Построение групповых решений в пространстве четких и нечетких бинарных отношений - М., 1982. - 168 с.
35. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М., 1981. -208 с.
36. Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т.Тэрано, К.Асаи, М.Сугэно. - М., 1993.
37. Штовба С.Д Проектирование нечетких систем средствами MATLAB - Горячая Линия - Телеком, 2007. - 288 с.
38. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and statistical data / European J. Operational Research, 1986, N 25. - pp. 345-356.
39. Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence – Princeton: Princeton Univ. Press, 1976. – 297 p.
40. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной / А.Н.Борисов, А.В.Алексеев, О.А.Крумберг и др. – Рига, 1982. – 256 с.
41. Zadeh L.A. Probability measures of fuzzy events // J. Math. Analysis and Applicat., 1968, vol. 23, N2. - pp. 421-427.
42. Робертс Ф. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам – М., 1986. –496 с
43. Красинский В.И Нечеткая классификация объектов малой числовой выборки // Автометрия, 2001, N 5. – с.117-125.
44. Суппес П., Зинес Дж. Основы теории измерений. // Психологические измерения. Сборник.– М., 1967. – 196 с.
45. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок – М. 1971. – 256 с.