Ы. Турсунбай кызы

ДЕРЕВЬЯ КЛИК ХОРДАЛЬНОГО ГРАФА И ДЕРЕВЬЯ ПОДГРАФОВ В ТЕОРИИ ГРАФОВ*

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые классы графов могут рассматриваться с помощью общего вида структуры дерева, определенного относительно отобранных индуцированных подграфов.

Классический подход деревьев клик к хордальным графам, а также к строго хордальным графам может быть обобщен, для того чтобы показать общую структуру для других классов графов, таких как строго хордальные графы, полностью сбалансированные гиперграфы, хордально двудольные графы и др. Обобщение деревьев клик посредством выбора других видов индуцированных подграфов, таких как окрестности вершин, позволяет определенные понятия и результаты хордальных графов переносить на другие классы графов. Таким образом, можно сказать, что представление графа деревом индуцированных подграфов различного рода имеет ценное практическое применение в общей теории графов.

Деревья клик имеют много применений, например, они могут использоваться для изучения взаимодействия белка в биологии [3]. Большинство клеточных процессов выполняется комплексами мультибелков – группами белков, объединенных для выполнения определенной задачи. Лучшее понимание данной организации белков в перекрывающихся комплексах – важный шаг к раскрытию функциональных и эволюционных механизмов биологических сетей. Эта ситуация может быть представлена графом, где вершины – белки, и две вершины связаны ребром, если соответствующие белки взаимодействуют. Комплекс белков может быть рассмотрен как клика данного графа. Тогда, когда граф является хордальным, дерево клики и семейство поддеревьев, представляющих вершины графа, обеспечивают хорошую основу для последующей деятельности белка в различных комплексах.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-90901)

2. ДЕРЕВЬЯ КЛИК ХОРДАЛЬНОГО ГРАФА

Пусть $G = (V, E)$ – некоторый граф и $S \subseteq V$. Подграф графа G, *порожденный* множеством S, – это $G[S] = (S, E[S])$, где $E[S] = \{u, v \in S \mid u, v \in S\}$. *Кликой* K графа называется подмножество графа G, в котором любые две вершины смежны, т.е. порожденный ими подграф является полным. Клика называется *максимальной*, если она не содержится в никакой другой клике. Обозначим множество максимальных клик графа G через K_G.

Предположим, что T – дерево, вершинами которого являются максимальные клики. Вершины дерева будем называть узлами, во избежание путаницы между ними и вершинами графа. Пусть для каждой вершины $v \in V(G)$ T_v означает подграф T, порожденный теми узлами, которые содержат v. Если каждый такой подграф T_v является связным, другими словами, если каждый T_v является поддеревом дерева T, тогда T называется *деревом клик* графа G.

Дерево клик T графа G обладает ***свойством индуцированных поддеревьев***: для всех $v \in V(G)$ подграф T, порожденный множеством максимальных клик графа G, содержащих вершину v, является деревом. Это эквивалентно ***свойству пересечения клик***: если любые две клики $K, K' \in K_G$, то множество $K \cap K'$ содержится в каждой клике на пути T между K и K'.

Граф называется *хордальным*, если каждый его цикл длины >3 содержит хорду, т.е. ребро, соединяющее несмежные вершины простого цикла.

Хордальные графы составляют один из наиболее изученных и применяемых классов графов. Так как хордальный граф является совершенным, его кликовое число равняется его хроматическому числу. Поэтому кликовое дерево графа непосредственно обеспечивает нахождение клик и хроматического числа графа. Более подробные определения и свойства хордальных графов приведены в [1], [2].

Авторы работ [4], [5] и [6] независимо от друга обнаружили одинаковые характеристики для хордальных графов.

Лемма 1. *Граф G является хордальным тогда и только тогда, когда он имеет дерево клик.*

При одном из способов доказательства того, что G имеет дерево клик T, только когда граф является хордальным, используется тот факт, что G является хордальным тогда и только тогда, когда G имеет совершенное элиминирующее упорядочение, означающее упорядочение $v_1, ..., v_n$ вершин $V(G)$ так, что каждая v_i находится в уникальной максимальной клике в подграфе G, индуцированном вершинами $v_1, ..., v_n$. Совершенное элиминирующее упорядочение легко получить из дерева клик: v_1 может быть любая вершина G, которая находится в уникальном узле T, затем удалить v_1 из узла T, соединить ребром узлы, которые становятся сравнимыми, повторить. Совершенное элиминирующее упорядочение может также использоваться в рекурсивном построении деревьев клик.

Значительная работа была сделана на возможных "формах", которые принимает дерево клик. Например, авторы работы [7] определяют листву хордального графа как минимальное число листьев дерева клик. Интервальным графом является хордальный граф, имеющий представление в виде поддеревьев, в котором главное дерево является путем; это позволяет рассматривать поддеревья как интервалы на вещественной прямой. Интервальные графы – это хордальные графы с листвой, не больше чем 2.

Ниже приведенные теоремы доказывают, как могут быть распознаны и построены деревья клик. Теорема 1 доказывает, как избежать проверку связности каждого T_v для того, чтобы показать, что дерево T является деревом клик.

Теорема 1. *(Acharya and Las Vergnas [8] and McKee [9]) Предположим, что T – некоторое дерево, узлами которого являются максимальные клики графа G. Тогда T является деревом клик тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство:*

$$\sum_{S \in V(T)} |S| - \sum_{SS' \in E(T)} |S \cap S'| = |V(G)|. \quad (1)$$

Пусть Ω^W является полным графом с вершинами, которые являются максимальными кликами графа G и с ребрами SS', которые имеют вес $S \cap S' \geq 0$. Теорема 2 доказывает, как легко построить дерево клик, когда он существует.

Теорема 2. *(Bernstein and Goodman [10]) Если G имеет дерево клик, тогда его дерево клик является максимальным каркасом Ω^W.*

Отсюда следует, что для графа G существует дерево клик тогда и только тогда, когда алгоритм Краскала или любой другой жадный алгоритм нахождения максимального каркаса дает нам дерево T для Ω^W, которое удовлетворяет равенству (1). Соответственно, деревья клик не должны быть однозначно определены. Но следующая теорема доказывает, что для любого дерева клик T графа G, мультимножество $\{S \cap S' : SS' \in E(T)\}$, которое также может быть обозначен как $E(T)$, определяется уникально.

Теорема 3. *(Barrett et al. [11] and Ho and Lee [12]) Любые два дерева клик T графа G имеют одинаковые мультимножества $E(T)$.*

Раскроем значение уникальности мультимножества $E(T)$ теоремы 3 следующим образом: если T является деревом клик графа G, тогда подмножество $Q \subseteq V(G)$ содержится в $E(T)$ только в том случае, когда Q является минимальным вершинным сепаратором графа G. Это значит, что существуют $u, v \in V(G)$ такие, что каждый путь, связывающий вершины u и v, содержит вершину из подмножества Q, и никакое правильное подмножество Q не имеет данного свойства; более того, кратность Q в $E(T)$ равна на единицу меньше количества компонент в подграфе G, порожденным теми вершинами, которые смежны с каждой вершиной в Q.

3. ДЕРЕВЬЯ ПОДГРАФОВ

Пусть L является мультимножеством отобранных индуцированных подграфов графа G, таким, что каждая вершина графа G находится, по крайней мере, в одном элементе L. Пусть T является деревом с множеством узлов L и для всех $v \in V(G)$, T_v означает подграф дерева T, индуцированный узлами, содержащими вершину v. Если каждое такое T_v является связным, тогда T называется *L-деревом* графа G. *Деревом подграфа G* является L-дерево для некоторого мультимножества L подграфов G, например, дерево клик графа G является L-деревом, где L – множество всех максимальных клик G.

Теоремы 1–3 (в которых L – мультимножество всех максимальных клик) могут быть обобщены для деревьев подграфов с множеством вершин L.

Рассмотрим некоторые классы графов, для которых существует дерево подграфов натурального мультимножества L индуцированных подграфов G. В лемме 1 класс графов, имеющий L-деревья, охарактеризован как граф пересечений поддеревьев деревьев. Доказательство того, что граф имеет L-дерево тогда и только тогда, когда граф находится в определенном классе, зависит от специфических свойств мультимножества L и класса графов.

3.1. Деревья

Граф G является *деревом*, если он связный и не имеет циклов.

Пример 1. Очевидно, что деревья имеют L-дерево, где мультимножество L – это множество всех ребер $E(G)$.

Для деревьев равенство (1) примет вид:

$$\sum_{SS' \in E(T)} |S \cap S'| = |E(G)|.$$

3.2. Графы клик

Граф клик некоторого графа G – это граф пересечений всех максимальных клик графа G. Открытая окрестность $N(v)$ вершины v состоит из всех вершин, смежных с v, а закрытая окрестность $N[v]$ – из $N[v] \cup \{v\}$.

Пример 2. Если L является мультимножеством всех закрытых окрестностей графа G, тогда граф G имеет L – дерево тогда и только тогда, когда G является графом клик хордального графа.

Отметим, что равенство (1) для графа клик уменьшится:

$$\sum_{SS' \in E(T)} |S \cap S'| = 2|E(G)|.$$

3.3. Биациклический гиперграф

Графом инцидентности гиперграфа (X, ε) называется двудольный граф с множеством вершин $(X \cup \varepsilon)$, у которого две вершины $x \in X$ и $S_i \in \varepsilon$ смежны тогда и только тогда, когда $x \in S_i$. Гиперграф (X, ε) является *деревом гиперграфа* (или *гипердеревом*) тогда и только тогда, когда найдется дерево T с множеством вершин X такое, что каждое ребро $S_i \in \varepsilon$ порождает поддерево в T и *двойственное гипердерево* тогда и только тогда, когда найдется дерево T с множеством вершин ε такое, что для всех вершин $x \in X$ множество $T_x = S_i \in \varepsilon : x \in S_i$ порождает поддерево в T. Отметим, что G имеет L-дерево тогда и только тогда, когда $(V(G), L)$ – двойственное гипердерево.

Гиперграф является *биациклическим гиперграфом*, если он и его двойственный гиперграф являются гипердеревом [13].

Пример 3. Если L является мультимножеством всех открытых окрестностей вершины графа G, тогда G имеет L-дерево тогда и только тогда, когда G является графом инцидентности биациклического гиперграфа.

Равенство (1) для графа инцидентности биациклического гиперграфа будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{SS' \in E(T)} |S \cap S'| = 2|E(G) - V(G)|.$$

Также, когда граф G является графом инцидентности биациклического гиперграфа, множество $S \subseteq V(G)$ содержится в $E(T)$ тогда и только тогда, когда S является минимальным вершинным сепаратором, который состоит из попарно несмежных вершин (вершинами из одноцветного класса двудольного графа G).

4. СТРОГИЕ ДЕРЕВЬЯ ПОДГРАФОВ

4.1. Строго хордальные графы

Пусть T является деревом графа G. Мультимножество

$$S \cap S' : SS' \in E(T),$$

также обозначаемое через $E(T)$, состоит из минимальных вершинных сепараторов графа G с кратностью (как описано в теореме 3). Дан граф G с деревом клик T, назовем каркас $T^{(1)}$ полного графа $\Omega^W(E(T))$ $E(T)$-*деревом*, если $T_v^{(1)}$ является связным для всех вершин v, которые являются минимальными вершинными сепараторами графа G.

Строгим L-деревом графа G является L-дерево T такое, что существует также $E(T)$ дерево $T^{(1)}$, $E(T^{(1)})$ дерево $T^{(2)}$ и так далее до тех пор, пока в $T^{(j)}$ не останется ребер.

Хорда x_i, x_j в цикле $C = (x_1, x_2, :, x_{2n})$ четной длины $2n$ является нечетной хордой, если расстояние между x_i и x_j в C является нечетным. G является *строго хордальным графом*, если G является хордальным и каждый цикл четной длины в G не меньше 6 имеет нечетную хорду [14].

Предположим, что $\Omega^W(L)$ означает полный граф с множеством вершин L и с ребром SS', имеющим вес $|S \cap S'| \geq 0$.

Пример 4. Если L является мультимножеством всех максимальных клик графа G, тогда G имеет строгое L-дерево тогда и только тогда, когда G является строго хордальным графом.

Пример 5. Если L является мультимножеством всех вершин закрытой окрестности графа G, тогда G имеет строгое L-дерево тогда и только тогда, когда G является строго хордальным графом.

Из примеров 2 и 5 можно получить следующее.

Лемма 2. *([15])G является строго хордальным графом тогда и только тогда, когда каждый индуцированный подграф графа G является графом клик хордального графа.*

4.2. Полностью сбалансированный гиперграф

Гиперграф – это пара (V, ε), где V – непустое множество объектов некоторой природы, называемых вершинами гиперграфа, а ε – семейство непустых подмножеств множества V, называемых ребрами гиперграфа.

Гиперграф называется *полностью сбалансированным* тогда и только тогда, когда каждый цикл длины больше 2 имеет ребро, содержащее, по крайней мере, три вершины цикла.

Пример 6. Граф G имеет строгое L-дерево тогда и только тогда, когда $(V(G), L)$ является тотально сбалансированным гиперграфом.

Отметим, что проверка, является ли каждая T^j $E(T^{j-1})$-деревом, может быть осуществлен проверкой следующего равенства для всех j:

$$\sum_{S \in V(T^{(j)})} |S| - \sum_{SS' \in E(T^{(j)})} |S \cap S'| = |\bigcup \{S : S \in V(T^{(j)})\}|.$$

4.3. Хордально двудольные графы

G является *хордально двудольным*, если G является двудольным и каждый цикл графа длины не меньше 6 имеет хорду [16].

Отметим, что, например, цикл C_4 является хордально двудольным – такие графы в общем случае нехордальны.

Пример 7. Если L является мультимножеством всех вершин открытой окрестности графа G, тогда G имеет строгое L-дерево тогда и только тогда, когда G является хордально двудольным графом.

Из примеров 3 и 7 можно получить следующую лемму.

Лемма 3. *Граф G является хордально двудольным тогда и только тогда, когда каждый индуцированный подграф G является графом инцидентности биациклического графа.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Евстигнеев В.А.** Хордальные графы и их свойства // Проблемы систем информатики и программирования. – Новосибирск, 1999 – С.33–64.
2. Лекции по теории графов / В.А.Емеличев, О.И.Мельников, В.И.Сарванов, Р.И.Тышкевич. – М.: Наука, 1990.
3. **Zotenko E., Guimaraes K.S., Jothi R. and Przytychka T.M.** Decomposition of overlapping protein complexes: a graph theoretical method for analyzing static and dynamic protein associations. Algorithms for Molecular Biology, 2006. – Vol.1(7).
4. **Buneman P.** A characterization of rigid circuit graphs. Discrete Math., 1974. – Vol.9. – P.205–212.
5. **Gavril F.** The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. J.Combinatorial Theory (Series B), – 1974. – Vol.16. – P.47–56.
6. **Walter J.R.** Representations of chordal graphs as subtrees of a tree. – J.Graph Theory. 1978. – Vol.2(3). – P.265–267.
7. **Lin L.-J., McKee T.A., West D.B.** Leafage of chordal graph. – Discuss.Math.Graph Theory, 1998. – Vol.18. – P.23–48.
8. **Acharya B.D., Las Vergnas M.**, Hypergraphs with cyclomatic number zero, triangulated graphs, and an inequality. – Journal of Combinatorial Theory (Series B), 1982. – Vol.33. – P.52–56.
9. **McKee T.A.** How chordal graphs work. – Bull. Inst. Combin. Appl., 1993. – Vol.9. – P.27–39.
10. **Bernstein P.A., Goodman N.** Power of natural semijoints. – SIAM. J. Comput., 1981. – Vol.10. – P.751-771.
11. **Barrett W.W., Johnson C.R., Lundquist M.** Determinantal formulae for matrix completions associated with chordal graphs. – Linear Algebra Appl., 1989. – Vol.121. – P.265–289.
12. **Ho C.-W., Lee R.C.T.** Counting clique trees and computing perfect elimination schemes in parallel. – Inform. Process. Lett., 1989. – Vol.31. – P.61–68.
13. **Dragan F.F., Voloshin V.I.** Incidence graphs of biacyclic hypergraphs. – Discrete Applied Mathematics, 1996. – Vol.68. – P.259–266.
14. **Farber M.** Characterization of strongly chordal graphs. – Discrete Math., 1983. – Vol.43. – P.173–189.
15. **Branstadt A., Dragan F.F., Chepoi V.D., Voloshin V.I.** Dually chordal graphs. – SIAM J. Discrete Mathematics, 1998. – Vol.11. – P.437–455.
16. **Golumbic M.C., Goss C.F.** Perfect elimination and chordal bipartite graphs. J.Graph Theory, 1978. – Vol.2. – P.155–163.