**Л. С. Мельников*, И. В. Петренко**

# ПУТЕВЫЕ ЯДРА И РАЗБИЕНИЯ В ГРАФАХ С МАЛЫМИ ДЛИНАМИ ЦИКЛОВ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $G = (V, E)$ — конечный граф. Количество вершин в самом длинном его пути будем обозначать через $\tau(G)$. Через $g(C)$ и $c(G)$ (*girth u circumference*) будем обозначать длину кратчайшего и длиннейшего циклов в $G$ соответственно. Через $C_n$ и $P_n$ будем обозначать цикл порядка $n$ и путь порядка $n$ соответственно, где порядок это число вершин. Вершину $v \in V$ будем называть $P_n$*-терминальной вершиной* графа $G$, если она является конечной вершиной $P_n$, но при этом не является конечной для $P_{n+1}$ в $G$.

Пусть $S$ — некоторое подмножество множества вершин $V(G)$. Подграф графа $G$, порожденный множеством $S$, будем обозначать $G[S]$. *Открытой окрестностью вершины* $v \in V(G)$ назовем множество вершин вида $N(v) = \{u \in V(G) | (u, v) \in E(G)\}$. *Открытой окрестностью* подмножества $A$ множества вершин $V(G)$ назовем множество вида $N(A) = \bigcup_{a \in A} N(a)$, а *замкнутой окрестностью* того же множества назовем множество вида $N[A] = N(A) \cup A$.

Для некоторой пары натуральных чисел $(a, b)$ разбиение множества вершин $V(G)$ на два непересекающихся подмножества $\{A, B\}$ называется $(a, b)$*-разбиением*, если $\tau(G[A]) \leq a$, а $\tau(G[B]) \leq b$, а граф, для которого имеется такое $(a, b)$-разбиение называется $(a, b)$*-разбиваемым.* Если $G$ является $(a, b)$-разбиваемым для любых $a$ и $b$ таких, что имеет место равенство $a + b = \tau(G)$, то такой граф будем называть $\tau$*-разбиваемым.*

Похожее понятие о разбиениях было введено раньше для других характеристик теории графов. Граф $G$ называется $\Delta(G)$*-разбиваемым* (где $\Delta(G)$ обозначает максимальную степень графа $G$), если для любой пары натуральных чисел $(a, b)$ такой, что $a + b \geq \Delta(G) - 1$, существует разбиение множества вершин $V(G)$ на два непересекающихся подмножества $\{A, B\}$ такое, что $\Delta(G[A]) \leq a$ и $\Delta(G[B]) \leq b$. Л. Ловас в [15]

*omeln@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-01-00395 и 05-01-00816).

доказал, что каждый граф $G$ является $\Delta(G)$-разбиваемым. М. Штибиц в [17] получил подобный результат, связанный с минимальной степенью $\delta(G)$. С.Капур, Х. Кронк и Д. Лик [13] также получили аналогичные результаты.

Является ли произвольный связный граф $\tau$-разбиваемым? Этот вопрос впервые был поднят в [1], хотя похожие попытки были сделаны К. Томассеном [18]. Имеются результаты, подтверждающие справедливость этой гипотезы для некоторых классов графов. Ответ на этот вопрос для общего случая пока неизвестен. Также эта гипотеза тесно связана с открытой гипотезой П. Михока [16] о ядрах и работой Хайнала [11] и нашла определенное отражение в диссертациях [11, 19]. Краткое перечисление рассматриваемых задач и их связи с поднятым вопросом о $\tau$-разбиваемости представлено в [5]. Вариант этого вопроса для ориентированных графов сформулирован в [14]. Подобные постановки рассматривались в [9, 10, 13].

Возникновение этого вопроса связано в частности с так называемым *$k$-хроматическим числом* графа $G$, обозначаемым $\chi_k(G)$, которое является наименьшим количеством множеств $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ в разбиении множества $V(G)$ таким образом, что имеет место $\tau(G[V_i]) \leq k$ для каждого $i$. В частности, Г. Чартрэнд, Д. П. Геллер и С. Хедетниеми в 1968 г. в [6] получили следующую верхнюю оценку для $k$-хроматического числа произвольного графа: $\chi_k(G) \leq \lfloor(\tau(G) - 1 - k)/2\rfloor + 2$. Ясно, что положительный ответ на вопрос о $\tau$-разбиваемости произвольного графа улучшит оценку до $\chi_k(G) \leq \lceil\tau(G)/k\rceil$.

Для произвольного графа $G$ подмножество $K$ множества $V(G)$ будем называть *$P_n$-ядром* $G$, если выполнены следующие условия:

1) $\tau(G[K]) \leq n - 1$;

2) каждая вершина $v \in V(G - K)$ смежна с $P_{n-1}$-терминальной вершиной $G[K]$.

Так, например, максимальное независимое множество вершин образует $P_2$-ядро, а вершины максимального подграфа, не содержащего пути $P_3$, образуют $P_3$–ядро.

Для произвольного графа $G$ подмножество $S$ множества $V(G)$ будем называть *$P_n$-полуядром* $G$, если выполнены следующие условия:

1) $\tau(G[S]) \leq n - 1$;

2) каждая вершина $v \in N(S) - S$ смежна с $P_{n-1}$-терминальной вершиной $G[S]$.

В [7] подробно разобраны вопросы существования путевых ядер и $\tau$-разбиваемости и, в частности, доказано, что из справедливости гипотезы о существовании в произвольном графе $P_n$-ядра для $n \geq 2$ следует справедливость гипотезы о $\tau$-разбиваемости. Там же доказано, что, если любой граф $G$ из некоторого наследственного класса имеет $P_n$-полуядро, то любой граф из этого же наследственного класса имеет $P_n$-ядро. Связи иерархических свойств и длиннейших простых путей см. в [2, 3, 4].

Взаимосвязь путевых ядер и вопросов $\tau$-разбиваемости ясна из следующего утверждения, доказанного в [7, 8].

**Утверждение 1.1.** *Пусть $G$ — граф, $\tau(G) = a + b$, причем $1 \leq a \leq b$. Если в $G$ существует $P_{b+1}$-полуядро, то граф $G$ является $(a,b)$-разбиваемым.*

Наконец, в [7] была сформулирована и доказана теорема о том, что всякий граф $G$ имеет $P_7$-ядро.

В первой [20] из двух наших статей доказана теорема о существовании $P_8$-ядра в любом графе $G$. Во второй нашей статье [21] доказана теорема о существовании $P_n$-ядра в графе $G$ со свойством $c(G) = n - 2$.

В настоящей работе будет сделан следующий шаг, а именно, доказана теорема о существовании $P_9$-ядра в произвольном связном неориентированном графе $G$, доказательство которой будет приведено с некоторыми сокращениями, обусловленными переборным характером доказательства и, как следствие, его большим объемом.

## 2. ДЛИНЫ ЦИКЛОВ И ПУТЕВЫЕ ЯДРА

Взаимосвязь длин кратчайшего и длиннейшего циклов в графе была замечена и изучена в [7, 8], где были доказаны следующие теоремы.

**Утверждение 2.1.** *Пусть $C$ — $(n-1)$-цикл в графе $G$, тогда $C$ является $P_n$-полуядром графа $G$.*

**Утверждение 2.2.** *Если $G$ — граф, причем $g(G) \geq n - 2$, то в $G$ существует $P_n$-ядро.*

Авторам удалось несколько улучшить первый из цитируемых результатов. Это следующее утверждение было опубликовано в [21] и будет в дальнейшем использоваться как вспомогательное.

**Утверждение 2.3.** *Пусть $G$ — связный граф, такой что длина наибольшего цикла $c(G) = n$, тогда в графе $G$ существует $P_{n+2}$-ядро.*

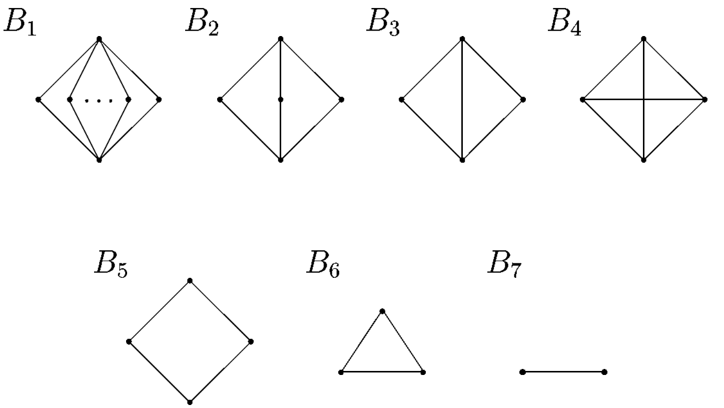


*Рис. 1.* Виды блоков в $G$ при $c(G) \leq 4$

Продолжая исследование взаимосвязи длин кратчайшего и длиннейшего циклов и существования путевых ядер, авторы доказали следующее утверждение.

**Теорема 2.4.** *Пусть $G$ — такой граф, что длина наибольшего цикла $c(G)$ не превышает 4, тогда в графе $G$ существует $P_n$-ядро для любых $n \geq 2$.*

**Доказательство.**

Пусть $n \geq 2$. Доказательство производится индукцией по $|V(G)|$. Если $|V(G)| \leq n$, то $V(G)$ является $P_n$-ядром графа $G$. Предположим, $|V(G)| \geq n$. Поскольку имеет место $c(G) \leq 4$, то граф $G$ состоит из блоков, которые представлены на рис. 1. Если в графе $G$ имеется в точности один блок, то в нем, очевидно, имеется $P_n$-ядро, тем самым базис индукции доказан.

Предположим, граф $G$ имеет более одного блока, пусть $B$ — концевой блок графа $G$ и $v$ — некоторая вершина из блока $B$. Не ограничивая общности, можем предположить, что $v$ не является точкой сочленения графа $G$.

По индукционному предположению, в графе $G \setminus v$ имеется $P_n$-ядро $K$. Если $v$ смежна с $(P_{n-1})$-терминальной вершиной из $K$ и $v$ является

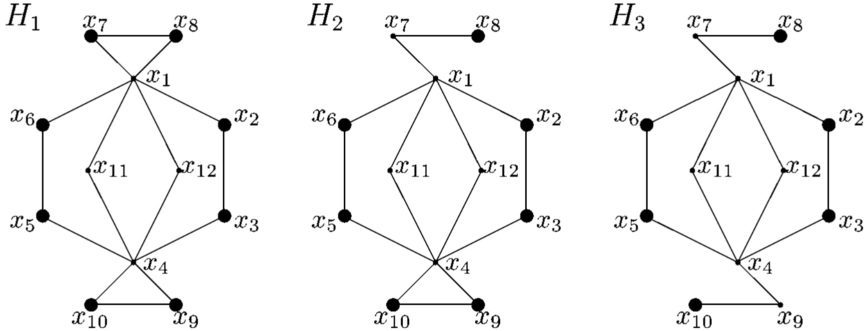


*Рис. 2.* Случай 1

$P_n$-терминальной вершиной в $G$, тогда множество вершин $K$ является $P_n$-ядром графа $G$.

Предположим, $v$ не является $P_n$-терминальной вершиной в $G$. В связи с тем, что $B$ — концевой блок графа $G$, через который проходит путь $P_n$, на котором лежит вершина $v$, то в силу того, что $B = B_i$ для некоторого $i$, такого что $1 \leq i \leq 7$, и тогда множество вершин $K \cup \{v\}$ является $P_n$-ядром графа $G$. Теорема доказана.

Данная теорема носит вспомогательный характер и используется для доказательства теоремы о существовании $P_9$-ядра в произвольном графе $G$.

## 3. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ $P_9$-ЯДРА

В данном разделе доказывается теорема о существовании $P_9$-ядра в некотором графе $G$. Доказательство теоремы приводится с сокращениями, фактически рассмотрен только случай, когда длина наибольшего цикла в графе $G$ равна 6. Сокращения вызваны, в первую очередь, огромным объемом доказательства, которое носит переборный характер. С другой стороны, авторы полагают, что теорему, доказанную в предыдущем разделе, можно доказать и для случая, если длина наибольшего цикла в графе $G$ не превышает 5. Исходя из этих соображений, а также из формата публикации, авторы позволили себе опустить один из случаев (случай 2), рассматриваемых в доказательстве нижеследующей теоремы.

**Теорема 3.1.** *В любом графе $G$ имеется $P_9$-ядро.*

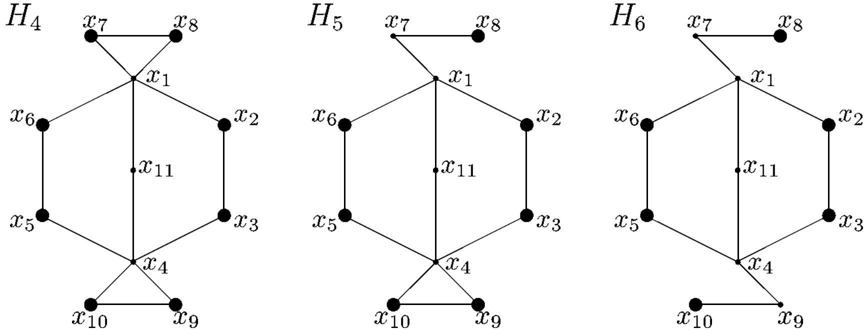


*Рис. 3.* Случай 2

**Доказательство.**

Если $\tau(G) \leq 8$, то $K = V(G)$ — $P_9$-ядро в графе $G$. Пусть $G$ — такой граф, что $\tau(G) \geq 9$. Ввиду утверждения из [7], приведенного выше, достаточно показать, что в графе $G$ имеется $P_9$-полуядро, при этом можно считать, что $g(G) \leq 7$ и что в $G$ нет $C_7$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $c(G) = 6$, т. е. в $G$ имеется $C_6$, но отсутствует $C_7$.
2. $c(G) = 5$, т. е. в $G$ имеется $C_5$ и отсутствуют $C_6, C_7$.
3. $c(G) \leq 4$, т. е. в графе $G$ имеется $C_4$ и отсутствуют $C_5, C_6, C_7$.

Отметим, что в случае 3 мы находимся в условиях доказанной в предыдущем разделе теоремы, поэтому нам остается разобрать только случаи 1 и 2.

Используем следующий алгоритм.

Пусть $S = H_s$, где $s$ — наименьший номер, такой что $H_s$ является подграфом графа $G$.

Для некоторых $A, B \subseteq V(G)$ в начале работы алгоритма предполагается, что $B = V(G) \setminus V(S)$ и $A = \emptyset$.

**Шаг 1.** Все вершины из множества $B$, смежные с $P_8$-терминальными вершинами из $S$, перемещаются в $A$. Если $N(S) \cap B = \emptyset$, то алгоритм прекращает работу. В противном случае выполняется шаг 2.

**Шаг 2.** Если две вершины $x, y \in S$ смежны с некоторой вершиной $b$ из $B$, то вершина $b$ перемещается в $S$ и осуществляется переход к шагу 1. В противном случае выполняется шаг 3.

**Шаг 3.** Пусть $P_7$-терминальная вершина $x$ из $S$ смежна с вершиной $b$ из $B$. Тогда вершина $b$ перемещается в $S$ и выполняется шаг 1. В противном случае выполняется шаг 4.

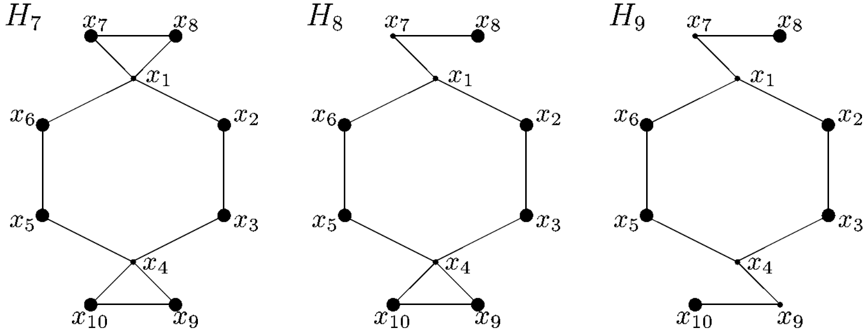


*Рис. 4.* Случай 3

**Шаг 4.** Пусть $P_6$-терминальная вершина $x$ из $S$ смежна с вершиной $b$ из $B$. Тогда вершина $b$ перемещается в $S$ и выполняется шаг 1. В противном случае выполняется шаг 5.

**Шаг 5.** Пусть $P_5$-терминальная вершина $x$ из $S$ смежна с вершиной $b$ из $B$. Тогда вершина $b$ перемещается в $S$ и выполняется шаг 1.

**Конец.**

Заметим, что в $S$ нет $P_n$-терминальных вершин, таких что $n \leq 4$, и в процессе работы алгоритма они не появляются. Отметим, что на рис. 2–13 «жирные» вершины являются $P_8$-терминальными вершинами.

После того, как приведенный алгоритм завершит работу, т. е. когда множество $N(S) \cap B$ окажется пустым, множество $S$ станет $P_9$-ядром графа $G$. Действительно, каждая вершина из $A$ окажется смежной с $P_8$-терминальной вершиной из $S$. Поэтому нам остается доказать лишь только, что $\tau(S) \leq 8$, для чего, в свою очередь, достаточно показать, что в процессе работы алгоритма в $S$ не возникнет путь длины 9.

Ясно, что путь длины 9 может возникнуть только в процессе перемещения вершин из $B$ в $S$. Шаги 3, 4, 5 и 6 осуществляются только тогда, когда в $B$ нет вершин, смежных более чем с одной вершиной из $S$. Поэтому при выполнении шагов 3, 4, 5 и 6 в $S$ не может возникнуть путь длины 9. Следовательно, достаточно выяснить, что при выполнении шага 2 описанного алгоритма путь длины 9 в $S$ не возникнет.

Рассмотрим случай 1. В графе $G$ содержится один из подграфов, изображенных на рис. 2–13.

Заметим, что в случае, если $S = H_2, H_5, H_8$, вершина $b$ из $B$ не может быть смежна с вершинами $x_1, x_7$, так как это противоречит предполо-

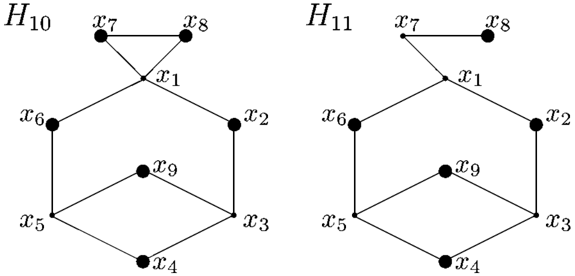


*Рис. 5.* Случай 4

жению о том, что $s$ — минимально, а в случае, когда $S = H_3, H_6, H_9$ — с вершинами $x_1, x_7$ и вершинами $x_4, x_8$ по той же причине.

В случае, если $S = H_1, H_2, H_3$, то для вершины $b$ из $B$ возможны следующие варианты: если вершина $b$ смежна с вершинами $x_1, x_{11}$ или (симметричный вариант) $x_4, x_{11}$, тогда вершина $b$, будучи добавлена, станет $P_8$-терминальной, а вместе с ней $P_8$-терминальной станет и вершина $X_{11}$, при этом $\tau(S \cup b)$ не превысит 8. Аналогичные рассуждения проходят в случаях, если $b$ из $B$ смежна с $x_1, x_{12}$ или $x_4, x_{12}$. Случай, когда $b$ из $B$ смежна с $x_{11}, x_{12}$ невозможен, так как это противоречит предположению о том, что длина максимального цикла не превышает 6, а в этом случае вершины $x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, b, x_{12}$ образуют цикл длины 7. И, наконец, если вершина $b$ будет смежна с вершинами $x_1, x_4$, то при добавлении в $S$ она не увеличит величину $\tau(S \cup B)$.

Рассмотрим случай $S = H_4, H_5, H_6$. Если предположить, что вершина $b$ смежна с вершинами $x_1, x_{11}$ или $x_4, x_{11}$, то вершины $b$ и $x_{11}$ становятся $P_8$-терминальными, $\tau(S)$ не возрастает, как и в случае, рассмотренном выше. Случай, когда $b$ смежна с вершинами $x_1, x_4$ невозможен, так как противоречит предположению о минимальности $s$.

Если $S = H_7, H_8, H_9$, то к сказанному выше можем только добавить, что предположение о том, что $b$ смежна с $x_1, x_4$ невозможно, так как противоречит предположению о минимальности $s$.

Для следующего семейства случаев, представленного на рис. 5–8, аналогично предыдущему семейству случаев заметим, что в случаях, когда $S = H_{11}, H_{13}, H_{15}, H_{17}$, предположение о том, что $b$ смежна с $x_1, x_7$, приводит к противоречию с предположением о минимальности $s$, так как в этом случае оказывается, что в графе $G$ содержится один

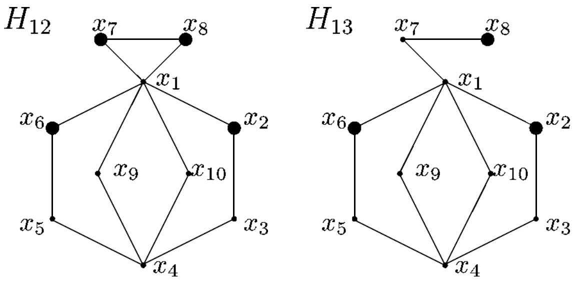


*Рис. 6.* Случай 5

из подграфов $H_{10}, H_{12}, H_{14}, H_{16}$ соответственно.

В случае, если $S = H_{10}, H_{11}$, с учетом замечания для вершины $b$, остается рассмотреть только вариант, когда вершина $b$ окажется смежной с вершинами $x_3, x_5$. Заметим, что в этом случае вершина $b$ может быть добавлена к $S$, при этом $\tau(S)$ не изменится. Аналогично в случае, если $b$ смежна с $x_1, x_3$ или (симметричный случай) с $x_1, x_5$.

Случай, когда $S = H_{12}, H_{13}$, отчасти аналогичен случаю, когда $S = H_1, H_2, H_3$, так, предполагая, что $b$ смежна с $x_1, x_9$ или с $x_4, x_9$, (симметричный случай $x_1, x_{10}$ или $x_4, x_{10}$), получаем, что после добавления вершины $b$ к подграфу $S$, вершины $b, x_9, (x_{10}), x_3, x_5$ становятся $P_8$-терминальными, и после этого ни одна вершина $b_1$ не может быть добавлена в $S$ таким образом, чтобы $\tau(S)$ увеличилось. Аналогично в случае, если $b$ смежна с $x_1, x_3$ или $x_1, x_5$, при этом $P_8$-терминальными становятся вершины $b, x_9, x_{10}$. Вершина $b$ не может быть смежна с $x_9, x_{10}$, так как это противоречит предположению о том, что в $G$ нет $C_7$, а с $x_3, x_5$ — потому что это противоречит предположению о минимальности $s$, так как при этом в графе $G$ содержался бы подграф $H_{10}, H_{11}$. Случаи, если $b$ смежна с $x_5, x_9$ или с $x_5, x_{10}$ (симметричные случаи — $x_3, x_{10}$ или $x_3, x_9$ соответственно), также невозможны в связи с предположением о длине максимального цикла в $G$.

Пусть $S = H_{14}, H_{15}$. Если $b$ смежна с $x_1, x_9$ или $x_4, x_9$, то при ее добавлении в $S$ вершины $b, x_3, x_5, x_9$ становятся $P_8$-терминальными и больше ни одна вершина $b_1$ не может быть добавлена в $S$ таким образом, чтобы величина $\tau(S)$ изменилась. Аналогично с предыдущим случаем $b$ не может быть смежна с $x_3, x_5$, так как это противоречит предположению о минимальности $s$. Предположение о том, что $b$ смежна с $x_1, x_4$, отсылает нас к предыдущему случаю. Кроме того, вершина

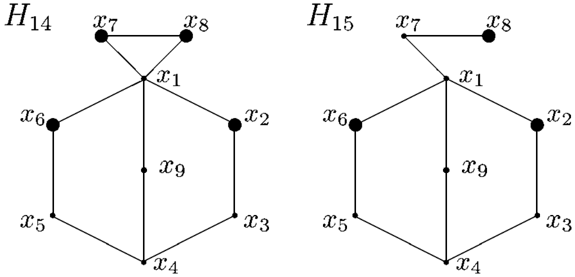


*Рис. 7.* Случай 6

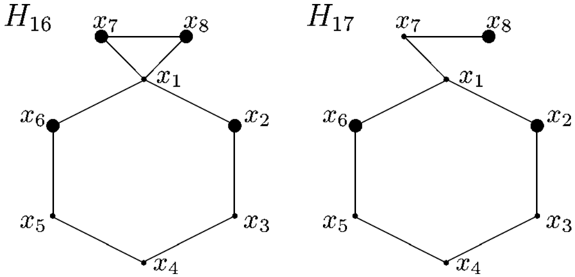


*Рис. 8.* Случай 7

$b$ не может быть смежна с $x_3, x_9$ или $x_5, x_9$, так как в этом случае в $G$ содержался бы $C_7$. Если же $b$ окажется смежной с $x_1, x_3$ или $x_1, x_5$, то она и $x_9$ окажутся $P_8$-терминальными в $S$, причем при ее добавлении в $S$ величина $\tau(S)$ не изменится.

Случай, если $S = H_{16}, H_{17}$, в целом полностью аналогичен предыдущим случаям этого семейства. Точно так же, если $b$ смежна с $x_1, x_3$ или $x_1, x_5$, то она становится $P_8$-терминальной и при добавлении ее или ее дубликатов роста $\tau(S)$ не происходит. В этом случае $b$ не может быть смежна ни с $x_1, x_4$, ни с $x_3, x_5$, так как при этом получаем противоречие с предположением о минимальности $s$. Отдельно заметим, что если допустить, что $b$ смежна с $x_3, x_4$ или с $x_4, x_5$, то получим противоречие с предположением о том, что в $G$ нет $C_7$, что, в общем, очевидно.

Особенный интерес представляют случаи $S = H_{18}, H_{19}, H_{20}$, так как они позволяют существенно сократить количество перебираемых случаев с учетом того, что при последовательном применении шага 4 и следом за ним шага 2 алгоритма, мы оказываемся в одной из рассмотренных выше ситуаций, поэтому в этих трех случаях нам достаточно показать, что на шаге 2 ни в одном из случаев в подграфе $S$ не возникает пути с длиной более 8.

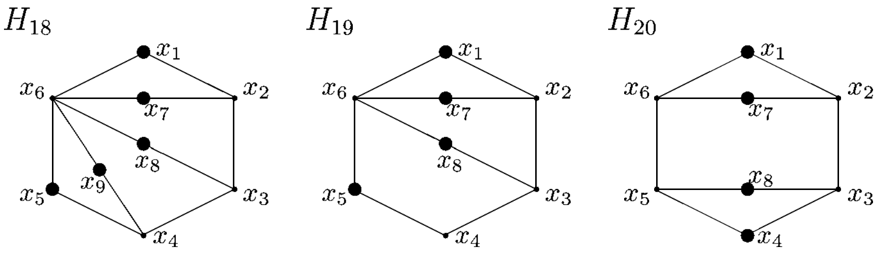


*Рис. 9.* Случай 8

Относительно случая $S = H_{18}$ достаточно заметить, что предположение о том, что $b$ смежна с $x_2, x_4$ противоречит нашему предположению об отсутствии в $G$ цикла длины 7, который в этом случае образовывали бы вершины $b, x_2, x_7, x_6, x_8, x_3, x_4$ (заметим сразу, что это же соображение справедливо и для следующего случая $S = H_{19}$), а при добавлении вершин из $B$, смежных с $x_2, x_6$ (симметричный вариант $x_4, x_6$) или $x_3, x_6$, значение $\tau(S)$ увеличиваться не будет.

Для случая $S = H_{19}$ добавим только, что, если $b$ смежна с $x_4, x_6$, то мы оказываемся в условиях предыдущего случая, а для случая $S = H_{20}$ заметим, что, если $b$ смежна с $x_2, x_5$ или $x_3, x_6$, то мы оказываемся в условиях случая $S = H_{19}$.

Рассмотрим случай $S = H_{21}$. Вершина $b$ может быть смежна с вершинами $x_1, x_3$, при этом она является дубликатом вершины $x_9$ и при добавлении в $S$ становится $P_8$-терминальной, как и в случаях, если вершина $b$ окажется смежна с вершинами $x_1, x_5$ или с вершинами $x_3, x_5$. В любом из этих случаев величина $\tau(S)$ остается неизменной. Заметим, что $b$ не может быть смежна с вершинами $x_2, x_5$, так как при этом в графе $G$ имелся бы цикл длины 7.

Для случая $S = H_{22}$ заметим, что $b$ не может быть смежна с вершинами $x_2, x_6$, так как при этом вершины $b, x_2, x_3, x_4, x_9, x_1, x_6$ образовывали бы цикл длины 7, а в случае, если допустить, что она смежна с $x_3, x_6$, то в графе имелся бы цикл длины 8. Ни одна вершина из $B$ не может быть смежна ни с парой вершин $x_2, x_4$, ни с парой $x_4, x_6$, так как при этом получим противоречие с предположением о минимальности $s$,

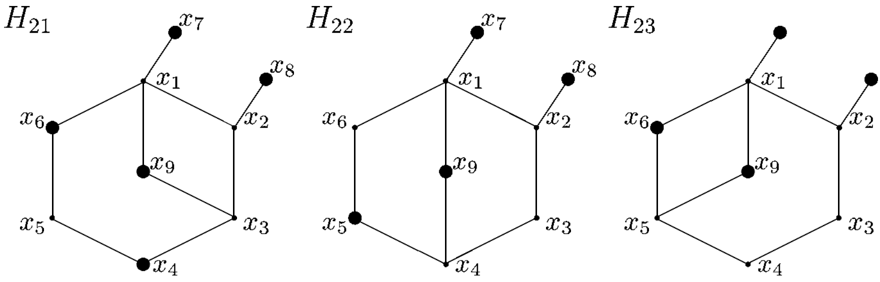


*Рис. 10.* Случай 9

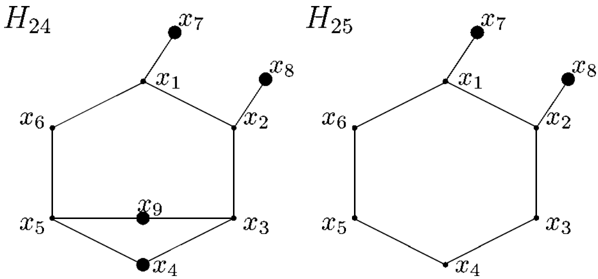


*Рис. 11.* Случай 10

так как в этом случае имело бы место $S = H_{19}$. Таким образом, при выполнении второго шага алгоритма на данном подграфе в $S$ могут быть добавлены только вершины, смежные с $x_1, x_4$, что не может вызвать роста $\tau(S)$.

Аналогично, в случае $S = H_{23}$ в подграф могут быть добавлены только те вершины из $B$, которые смежны с $x_1, x_5$, при добавлении такие вершины станут $P_8$-терминальными и не изменят значение $\tau(S)$. Если бы $b$ была смежна с $x_1, x_3$, то в $G$ имелся бы подграф $H_{21}$, а если с $x_1, x_4$ или $x_2, x_5$, то в $G$ имелся бы $H_{22}$. Наконец, если предположить, что $b$ смежна с $x_2, x_4$, получим, что в $G$ имеется $H_{20}$.

Рассмотрим случай $S = H_{24}$. Аналогично предыдущим случаям этого семейства, для вершины $b$ из $B$ возможен лишь вариант, когда $b$ смежна с $x_3, x_5$, и тогда ее добавление в $S$ не изменяет величину $\tau(S)$, причем сама она становится $P_8$-терминальной. Во всех остальных случаях получаем противоречие с нашим предположением о минимальности $s$. В случае $S = H_{25}$ содержательным является также только один вариант для $b$, а именно — вариант, когда она смежна с $x_3, x_6$. При этом и вершина $b$ и вершины $x_4, x_5$ становятся $P_8$-терминальными.

Рассмотрим случай $S = H_{26}$. В этом случае для вершины $b$ также имеется только один вариант, когда она смежна с $x_2, x_6$, при этом такая вершина, будучи добавлена в подграф $S$, не повлияет на величину $\tau(S)$. Во всех остальных случаях получим противоречие с нашим предположением о минимальности $s$. Аналогично и в случае $S = H_{27}$, предположение о том, что $b$ смежна с $x_1, x_3$ или $x_3, x_5$, а также с $x_2, x_6$, приводит нас к тому, что в $G$ имеется $H_{19}$, а полагая, что $b$ смежна с $x_1, x_5$ или с $x_2, x_5$, мы придем к противоречию с предположением о том, что в $G$ нет цикла длины 8. Поэтому вершина $b$ может быть смежна лишь только с верщинами $x_3, x_6$, при этом ее добавление в $S$ не изменит величину $\tau(S)$.

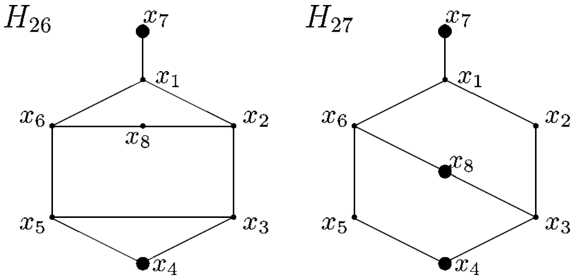


*Рис. 12.* Случай 11

И наконец, в случае, когда $S = H_{28}$ или $S = H_{29}$, ни одна вершина $b$ из $B$ не может быть добавлена в $S$ при выполнении шага 2 алгоритма, так как при этом получим противоречие с предположением о минимальности $s$. Так, если предположить, что $b$ смежна с $x_2, x_6$ или $x_3, x_5$, то окажется, что в $G$ имеется $H_{26}$, а если бы $b$ была смежна с $x_2, x_5$ или $x_3, x_6$, то в $G$ имелся бы подграф $H_{27}$. Предполагая, что $b$ смежна с $x_1, x_4$, в обоих случаях получим, что в $G$ имелся бы цикл длины 7.

На этом разбор случая 1 может быть закончен. Как видно из вышеприведенных рассуждений, алгортим всякий раз заканчивает работу и $S$ становится $P_n$-ядром графа $G$.

Как было сказано выше, в настоящей работе мы опустим разбор случая 2 в связи с большим количеством подслучаев, требующих перебора. Идея этого перебора полностью аналогична случаю 1, технически он осуществляется без каких бы то ни было проблем.

Теорема о существовании $P_9$-ядра доказана.

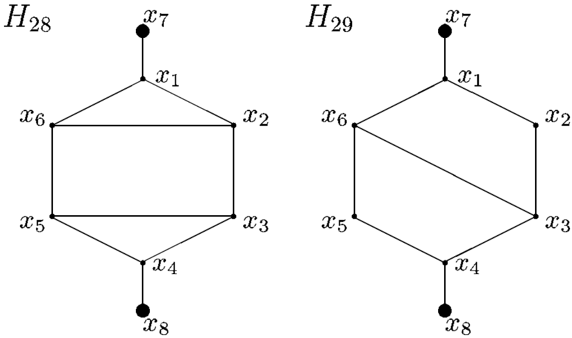


*Рис. 13.* Случай 12

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было сказано выше, наличие $P_n$-ядра в графе $G$ означает, что граф $G$ является $(\tau(G)-n+1, n-1)$-разбиваемым. Непосредственным следствием из теоремы о существовании $P_9$-ядра будет следствие о том, что граф $G$ с $\tau(G) \geq 8$ является $(\tau(G)-8, 8)$-разбиваемым. Откуда немедленно вытекает

**Теорема 4.1.** *Граф $G$ является $\tau$-разбиваемым при любом $\tau(G) \leq 17$.*

Трудоемкость доказательства приводит авторов к необходимости искать контрпример графа $G$, который не является $\tau(G)$-разбиваемым, и следовательно, существует пара чисел $(a, b)$, такая что $\tau(G) = a + b$ и граф $G$ не является $(a, b)$-разбиваемым. Предположим $a \leq b$. Непосредственно из результатов данной работы, а также из результатов [2, 7, 20, 21] имеем следующие свойства, которыми обладает такой граф-контрпример.

1. В $G$ отсутствует гамильтонов путь.

2. $a > 8$.

3. $17 < \tau(G) < |V(G)| - 1$.

4. $3 < \Delta(G) < |V(G)| - a - 1$, где $\Delta(G)$ обозначает максимальную степень графа $G$.

5. В $G$ имеется циклический блок, не являющийся гамильтоновым, причем $c(G) \geq 5$.

6. В $G$ имеются как четный, так и нечетный циклы, но нет циклов длины $b$.

7. В $G$ имеются длинные циклы: имеет место неравенство $c(G) > a + 2$.

8. В $G$ имеются и короткие циклы: имеет место $g(G) < a - 1$.

Кроме того, как уже говорилось, нам известно, что из существования $P_n$-ядра вытекает $\tau$-разбиваемость графа. Однако нам неизвестно, есть ли обратная связь, т. е. следует ли из $\tau$-разбиваемости графа существование путевого ядра некоторого порядка, и если ответ положительный, то какова связь порядка ядра с $\tau(G)$.

Авторы выражают свою искреннюю признательность А. В. Косточке, привлекшему внимание к этой теме и давшему много полезных советов в процессе работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihók P., Semanišin G.** A survey of hereditary properties of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1997.— Vol. 17, N 1. — P. 5–50.
2. **Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M.** A path(ological) partition problem // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1998. — Vol. 18, N 1. — P. 113–125.
3. **Broere I., Dorfling M.** The decomposibility of additive of hereditary properties of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 2000 — Vol. 20, N 2. — P. 281–291.
4. **Broere I, Frick M., Semanišin G.** Maximal graphs with respect to hereditary properties // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 1. — P. 51–66.
5. **Broere I., Hajnal P., Mihók P.**. Partition problems and kernels of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1997. — Vol.17, N 2. — P. 51–56.
6. **Chartrand G., Geller D. P., Hedetniemi S. T.** A generalization of the chromatic number // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1968. — Vol. 64, N 2. — P. 265–271.
7. **Dunbar J. E., Frick M.** Path kernels and partitions // J. Combin. Math. Combin. Comput. — 1999. — Vol. 31. — P. 137–149.

8. **Dunbar J.E., Frick M., Bullock F.** Path partitions and $P_n$-free sets // Discrete Math. — 2004. — Vol. 289, N 1–3. — P. 145–155.
9. **Frick M., Bullock F.** Detour chromatic numbers of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 2001. — Vol. 21, N 2. — P. 283–291.
10. **Györy E., Kostochka A.V., Luczak T.** Graphs without short odd cycles are nearly bipartite // Discrete Math. — 1997. — Vol. 163, N 1–3. — P. 279–284.
11. **Hajnal P.** Partitions of graphs with condition on the connectivity and minimum degree // Combinatorica. — 1984. — Vol. 3, N 1. — P. 95–99.
12. **Hajnal P.** Graph partitions // Ph.D. Thesis, Szeged Attila József University, 1984.
13. **Kapoor S. F., Kronk H. V., Lick D. R.** On detuurs in graphs // Canad. Math. Bull. — 1966. — Vol. 11, N 2. — P. 195–201.
14. **Laborde J. M., Payan C., Xuong N. H.** Independent sets and longest directed paths in digraphs // Graphs and other combinatorial topics (Prague, 1982). — Leipzig: Teubner, 1983. — P. 173–177.
15. **Lovász L.** On decomposition of graphs // Studia Sci. Math. Hungar. — 1966. — Vol. 1, N 1–2. — P. 237–238.
16. **Mihók P.** Problem 4 // Graphs, hypergraphs and matroids. — Zielona Góra: Higher College Engrg., 1985. — P. 86.
17. **Stiebitz M.** Decomposing graphs under degree constraints // J. Graph Theory. — 1996. —- Vol. 23, N 3. — P. 321–324.
18. **Thomassen C.** Graph decomposition with constraints on the connectivity and minimum degree // J. Graph Theory. — 1983. — Vol. 7, N 2. — P. 261–291.
19. **Vronka J.** Vertex sets of graphs with prescribed properties // Ph. D. Thesis, Košice, Šafárik University, 1986.
20. **Мельников Л. С., Петренко И. В.** О путевых ядрах и разбиениях в неориентированных графах // Дискретный анализ и исследование операций. — 2002. — Т. 9, Сер. 1, № 2. — С. 21–35.
21. **Мельников Л. С., Петренко И. В.** Путевые ядра и длины циклов в неориентированных графах // Современные проблемы конструирования программ. — Новосибирск, 2002. —- С. 222–231.