Л. С. Мельников, И. В. Петренко

НЕКОТОРЫЕ ИНВАРИАНТЫ КУБОПОДОБНОГО ГРАФА[1]

1. ВВЕДЕНИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $U = \{1, \ldots, n\}$ — конечное n–элементное множество; $\mathcal{P}(U)$ — множество всех подмножеств множества U; $S \subseteq \mathcal{P}(U)$ — некоторое семейство подмножеств U.

Определение 1. Кубоподобным графом $Q_n(S)$ назовем граф с множеством вершин $\mathcal{P}(U)$, пара которых смежна тогда и только тогда, когда их симметрическая разность $(x\Delta y)$ лежит в S.

Понятие кубоподобного графа введено Ловасом (Lovasz). Определенный круг авторов проявлял интерес к этому классу графов, в частности, к их хроматическим характеристикам (см. [9]). Результаты, полученные ранее, сформулированы в основном для дистанционных графов $Q_n[D]$, которые являются собственным подклассом класса кубоподобных графов. Множество вершин $Q_n[D]$ идентично множеству вершин кубоподобного графа, а множество D — множество целых неотрицательных чисел. Пара вершин x и y в дистанционном графе $Q_n[D]$ смежна в том и только в том случае, если $|x\Delta y| \in D$.

Жежер (Jaeger) [7] доказал, что для случая, когда S — семейство двухэлементных подмножеств U, которое может быть рассмотрено в качестве множества ребер некоторого графа, имеет место неравенство:

$$\chi(Q_n(S)) \leq 2^{\lceil \log_2 \gamma \rceil},$$

где γ — хроматическое число графа $G = (U, S)$. Он также полагал, что равенство достижимо.

В работе [10] было доказано, что $\chi(Q_n[2]) = 2^{[\log_2 n]}$, если n представимо в виде $2^i, 2^i - 1, 2^i - 2, 2^i - 3$.

Дворжак (Dvorjak) высказывал предположение, что хроматическое число дистанционного графа всегда является степенью 2.

Соколова (Sokolova) [12] доказала, что хроматическое число $Q_{2k}[1, 2k]$ так называемого "расширенного нечетного графа" равно четырем.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-794) и Министерства образования РФ.

Наконец, Пэйян (Payan) [11] опроверг предположение Дворжака контрпримером — им была построена минимальная семицветная раскраска графа Q_6[4]. Помимо этого в статье была доказана следующая

Теорема 1. (C. Payan). *Для всякого недвудольного кубоподобного графа имеет место неравенство* $\chi(Q_n(S)) \geq 4$.

Для некоторого $x \in \mathcal{P}(U)$ кубоподобного графа $Q_n(S)$ и некоторого множества $S_1 \subseteq \mathcal{P}(U)$ под записью вида $x\Delta S_1$ будем понимать множество вида $\{x\Delta s_1, \ldots, x\Delta s_l\}$, где $s_1, \ldots, s_l$ — элементы множества S_1.

В дальнейшем будем полагать, что граф $Q_n(S)$ не содержит петель, т. е. ребер вида (x, x).

Легко видеть, что операция Δ обладает следующими свойствами:

1) $(x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$;

2) $x\Delta y = y\Delta x$;

3) $x\Delta y = \emptyset \Leftrightarrow x = y$;

4) $x\Delta z = y\Delta z \Leftrightarrow x = y$.

Исходя из этих свойств симметрической разности, легко видеть, что если $x\Delta y = z$, то $x = y\Delta z$.

Лемма 1.1. *Для произвольного* $U \subset \mathcal{N}$ *множество* $\mathcal{P}(U)$ *является группой относительно операции симметрической разности* Δ.

Доказательство. Действительно, поскольку, как показано выше, операция Δ удовлетворяет всем аксиомам групповой операции, для доказательства достаточно продемонстрировать, что $\mathcal{P}(U)$ замкнуто относительно операции Δ. Для двух произвольных x и y из $\mathcal{P}(U)$ имеет место $x, y \subseteq U$. Соответственно $x \setminus y$ и $y \setminus x$ также являются подмножествами U, равно как и их объединение, откуда следует, что $x\Delta y$ является элементом $\mathcal{P}(U)$. Замкнутость операции доказана.

Следующие утверждения будут полезны в ходе дальнейшего изложения.

Утверждение 1.2. $Q_n(\emptyset)$ *— пустой (петельный) граф.*

Из определения кубоподобного графа и доказанной леммы следует: поскольку $S = \emptyset$, то для двух смежных вершин x и y имеем: $x\Delta y = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = y$, что означает, что множество ребер данного графа $E(Q_n(S)) = \{(x, x); x \in \mathcal{P}(U)\}$, т. е. состоит из петель, которые мы игнорируем.

Утверждение 1.3. $Q_n(\mathcal{P}(U))$ *— полный граф.*

Согласно определению смежности в кубоподобном графе $(x, y) \in E(Q_n(\mathcal{P}(U)))$ тогда и только тогда, когда $(x\Delta y) \in \mathcal{P}(U)$. Легко видеть, что в силу такого определения смежности любая пара вершин в данном графе является смежной, а следовательно, $Q_n(\mathcal{P}(U))$ — полный граф.

Утверждение 1.4. $Q_n(s)$ — паросочетание.

Покажем для случая $S = \{s\}$, что каждая вершина имеет в точности одного соседа. Пусть это не так. Тогда для некоторой вершины x существует по меньшей мере пара вершин y_1, y_2 таких, что $x\Delta y_1 = x\Delta y_2 = s$, это, в свою очередь, согласно лемме 1.1 означает, что $y_1 = y_2 = y$, т. е. для любой вершины x существует в точности одна вершина y, смежная с ней.

Утверждение 1.5. Пусть $|S| = 2$. Тогда кубоподобный граф $Q_n(S)$ двудольный.

Согласно известной теореме Кенига граф является двудольным в том и только в том случае, если он не содержит циклов нечетной длины. Предположим, что наш граф $Q_n(S)$, где $S = \{s_1, s_2\}$, содержит цикл нечетной длины. Легко видеть, что длина такого цикла не превосходит трех. Допустим, существует три такие вершины — $x, y, z,$ — которые образуют такой цикл. Это означает, что множество S содержит элементы $x\Delta y$, $y\Delta z$, $z\Delta x$, причем все они различны, что противоречит условию утверждения. Таким образом, утверждение доказано.

2. КЛИКИ, НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА, ПЛОТНОСТЬ, НЕПЛОТНОСТЬ, КЛИКОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО КУБОПОДОБНОГО ГРАФА

Лемма 2.1. Если $Q_n(S)$ содержит полный подграф, то найдется $S_1 \subseteq S$ такое, что S_1 индуцирует ребра полного подграфа и является группой относительно операции симметрической разности Δ.

Доказательство. Пусть $\{x_1, \ldots, x_l\}$ — полный подграф. Применим метод математической индукции.

$k = 2$, т. е. полный подграф состоит из двух вершин $\{x_1, x_2\}$, множеству ребер данного подграфа соответствует множество $S_1 = \{x_1\Delta x_2, \emptyset\}$, которое, очевидно, является группой относительно симметрической разности Δ.

Полагаем, что для некоторого l предположение индукции доказано, и для полного подграфа $K_l = \{x_1, \ldots, x_l\}$ множество S_l, индуцирующее его ребра, является группой относительно Δ.

Исходя из сформулированнной индукционной гипотезы, докажем наше утверждение для $l+1$. Для этого необходимо рассмотреть множество

$$S_{l+1} = S_l \cup \{x_{l+1}\Delta x_1, \ldots, x_{l+1}\Delta x_l\}.$$

Очевидно, что множество S_{l+1} индуцирует множество ребер полного подграфа K_{l+1}. Докажем, что S_{l+1} — группа. Для чего покажем замкнутость S_{l+1} относительно симметрической разности.

Для этого рассмотрим следующие три варианта:

1) $s_1, s_2 \in S_l$ — в этом случае в силу того, что S_l — группа, очевидно, что $s_1\Delta s_2 \in S_l \subseteq S_{l+1}$;

2) $s_1, s_2 \in S_{l+1} \backslash S_l$ — в этом случае имеем $s_1\Delta s_2 = x_{l+1}\Delta x_i \Delta x_{l+1}\Delta x_j$, что в силу выше доказанных утверждений равно $x_i\Delta x_j \in S_l \subseteq S_{l+1}$;

3) $s_1 \in S_l, s_2 \in S_{l+1} \setminus S_l$ — в этом случае $s_1\Delta s_2 = x_i\Delta x_j \Delta x_{l+1}\Delta x_k$. Ясно, что $x_i\Delta x_j = s_m$ для некоторого m, причем $s_m \in S_l$ в силу индукционной гипотезы, т. е. $x_k\Delta s_m \in K_l = \{x_1, \ldots, x_l\}$. Откуда в силу того, что вершина x_{l+1} является смежной со всеми вершинами K_l, имеем

$$x_{l+1}\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k \in S_{l+1},$$

что доказывает, что S_{l+1} замкнуто относительно операции Δ, а это означает, что S_{l+1} — группа, что и требовалось доказать.

Лемма 2.2. Если $S_1 \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(U)$ таково, что S_1 — группа относительно Δ, то $Q_n(S)$ содержит полный подграф мощности $|S_1|$.

Доказательство. Для произвольной вершины x графа $Q_n(S)$ рассмотрим множество вершин $K = x\Delta S_1$. Поскольку все элементы S_1 попарно различны $|K| = |x\Delta S_1| = |S_1|$ в силу вышедоказанных свойств Δ. Докажем, что K — полный подграф.

Для $x_1, x_2 \in K$ имеем $x_1 = x\Delta s_1,\ x_2 = x\Delta s_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S_1$. Следовательно, $x_1\Delta x_2 = x\Delta s_1 \Delta x\Delta s_2 = s_1\Delta s_2$, где $s_1, s_2 \in S_1$, а поскольку S_1 — группа, имеем $s_1\Delta s_2 \in S_1$, что означает, что рассмотренные вершины смежны. Тем самым лемма доказана.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.3. $Q_n(S)$ *содержит полный подграф* K *тогда и только тогда, когда существует* $S_1 \subseteq S$ *такое, что* S_1 *— группа относительно* Δ*, при этом* $|K| = |S_1|$.

Поскольку независимое множество есть не что иное, как полный подграф в дополнении исходного графа, а дополнение графа $Q_n(S)$ есть граф $Q_n(\mathcal{P}(U) \setminus S)$, может быть сформулирована следующая теорема, двойственная к предыдущей, и являющаяся ее очевидным следствием.

Теорема 2.4. $Q_n(S)$ *содержит независимое множество вершин* I *тогда и только тогда, когда существует* $S_1 \subseteq \mathcal{P}(U) \setminus S$ *такое, что* S_1 *— группа, при этом* $|I| = |S_1|$.

Замечание. Отметим, что клике, т. е. максимальному полному подграфу в $Q_n(S)$, соответствует максимальная по включению группа $S_1 \subseteq S$ и наоборот. Аналогичное утверждение верно и для максимального независимого множества с заменой индуцирующего ребра множества S на его дополнение.

Пусть $S \subseteq \mathcal{P}(U)$ является группой относительно Δ. Элементы $s_1, \ldots, s_m$ будем называть *индуцирующими группу,* если для любых $i, j, k \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется $s_i \neq s_j \Delta s_k$.

Лемма 2.5. *Если* $S \subseteq \mathcal{P}(U)$ *— группа относительно* Δ*, то* $|S| = 2^m$*, где* $m \leq n = |U|$ *— некоторое натуральное число.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ — максимальный набор индуцирующих элементов группы S. Через X_Δ обозначим множество вида

$$\{x_1, \ldots, x_l, x_1 \Delta x_2, \ldots, x_{l-1} \Delta x_l, x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \ldots \\ \ldots, x_{l-2} \Delta x_{l-1} \Delta x_l, \ldots, x_1 \Delta x_2 \Delta \ldots \Delta x_l\}.$$

Очевидно, что $X_\Delta \subseteq S$.

Докажем обратное. Предположим, что $S \setminus X_\Delta \neq \emptyset$, т. е. существует $s \in S \setminus X_\Delta$. Поскольку S — группа, а следовательно, S замкнуто относительно операции симметрической разности Δ, то существует пара $\{s_1, s_2 : s_1 \Delta s_2 = s\}$. Если при этом хотя бы один из этих трех элементов, например s_1, принадлежит множеству X_Δ, то получаем противоречие с предположением о максимальности множества индуцирующих группу S элементов. Если же ни один из указанных элементов не принадлежит X_Δ, то $S \setminus X_\Delta$ содержит группу (поскольку пустое множество содержится в любом из множеств) относительно Δ, для которой может быть построен набор индуцирующих элементов. Обозначим этот набор через X_1. При этом $X \cup X_1$ образует новый индуцирующий набор для группы S, который превосходит исходный максимальный. Снова получено противоречие с предположением относительно максимальности набора индуцирующих элементов X, что доказывает требуемое включение $S \subseteq X_\Delta$. Таким образом, доказано, что $S = X_\Delta$.

Далее, поскольку все элементы X_Δ попарно различны (в силу свойств симметрической разности рассмотренных выше), то $|X_\Delta| = 2^l$, где l — длина индуцирующего набора, т. е. некоторое натуральное число, например m. Очевидно, $|S| = |X_\Delta| = 2^m$.

Доказанная лемма в сочетании с теоремами, сформулированными выше, позволяет сформулировать следующие теоремы.

Теорема 2.6. *Плотность кубоподобного графа* $\omega(Q_n(S)) = 2^m$, *где* m *— целое неотрицательное число.*

Теорема 2.7. *Неплотность кубоподобного графа* $\varepsilon(Q_n(S)) = 2^l$, *где* l *— целое неотрицательное число.*

Теорема 2.8. *Кликоматическое число* k *кубоподобного графа* $Q_n(S)$ *есть* 2^l, *где* l *— некоторое целое неотрицательное число, причем если выполняется равенство* $\omega(Q_n(S)) = 2^m$, *то для* l *имеет место равенство* $l = n - m$.

Доказательство. Допустим, граф $Q_n(S)$ содержит клику K_1, индуцируемую подмножеством S_1 множества S. Предположим, что вершина $\emptyset \in V(K_1)$, а следовательно, любая вершина K_1 смежна с $\emptyset$. Иными словами, $x \in K$, если и только если $x \in S_1$. Выберем произвольным образом вершину x_1 из множества $V(Q_n(S)) \setminus S_1$. Отметим, что множество вершин $\{x_1 \Delta S_1\}$, безусловно, также является кликой. Обозначим ее K_2. После этого произведем удаление вершин двух выявленных клик из множества вершин исходного графа и будем повторять описанную операцию до тех пор, пока множество вершин $Q_n(S)$ не будет исчерпано. Наконец, получим последовательность клик $K_1, K_2, \ldots, K_p$. Заметим, что $V(K_i) \cap V(K_j) = \emptyset$.

Действительно, предположим, что некоторая вершина $y \in K_i \cap K_j$ для некоторых различных $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. Из этого следует, что $y = x_i \Delta s_1$, где $s_1 \in S_1$, а $x_i \in K_i$, при этом, с другой стороны, $y = x_j \Delta s_2$, где также $s_2 \in S_1, x_j \in K_j$, т. е. имеет место равенство

$$x_i \Delta s_1 = x_j \Delta s_2,$$

эквивалентное равенству

$$x_i \Delta x_j = s_1 \Delta s_2,$$

в котором $s_1 \Delta s_2 = s$, где $s \in S_1$ в силу того, что S_1 — группа относительно Δ, а s_1, s_2 — ее элементы. Откуда следует, что $x_i \Delta x_j \in S_1$, т. е. обе вершины x_i и x_j смежны в $Q_n(S_1)$, — в таком суграфе $Q_n(S)$, который содержит только ребра клики, что противоречит условию выбора вершин x_i и x_j. Тем самым доказано, что $K_i \cap K_j = \emptyset$ для всех i, j.

Ясно, что описанный алгоритм на некотором шаге завершает работу. При этом на каждом шаге работы из множества вершин исходного графа удаляется 2^m элементов. В силу этого имеет место неравенство $p \leq 2^{n-m}$. Докажем, что

$$V(K_1) \cup \ldots \cup V(K_p) = V(Q_n(S)).$$

Для этого достаточно показать, что

$$V(Q_n(S)) \subseteq V(K_1) \cup \ldots \cup V(K_p).$$

Действительно, если найдется такая вершина x, которая не принадлежит ни одной из клик $K_1, \ldots, K_p$, то она должна быть либо несмежна ни с одной другой вершиной, чего не может быть в силу того, что индуцирующее множество S непусто, либо она (вершина) в совокупности с множеством соседей $x \Delta S_1$ не образует клику, чего также не может быть в силу того, что S_1 — группа, а также в силу вышедоказанных лемм.

Таким образом, имеем

$$V(K_1) \cup \ldots \cup V(K_p) = V(Q_n(S)).$$

Теперь заметим, что $|V(K_i)| = |V(K_j)|$ для всех i, j. Или, иными словами, $|V(K_1)| \cdot p = |V(Q_n(S_1))| = 2^n$, с другой стороны, поскольку нам известно, что $|V(K_1)| = 2^m$, имеем уравнение $2^m p = 2^n$ относительно p, из которого ясно, что $p = 2^l$, где $l = n - m$. Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Отметим, что в случае, когда $Q_n(S)$ таков, что S_1 индуцирует клику, а множество $S \setminus S_1$ не индуцирует клику мощности больше двух, граф $Q_n(S)$ является совершенным, поскольку имеет место равенство $k(Q_n(S)) = \varepsilon(Q_n(S))$.

Действительно, если плотность кубоподобного графа $Q_n(S)$ есть 2^m, то его неплотность $\varepsilon(Q_n(S)) = 2^{n-m}$, с другой стороны, $k(Q_n(S)) =$

2^{n-m} в силу вышедоказанной теоремы, если выполнено оговоренное выше условие. Отсюда может быть сделан следующий вывод: *при оговоренных в посылке замечания условиях для хроматического числа кубоподобного графа* $Q_n(S)$ *имеет место равенство*

$$\chi(Q_n(S)) = \omega(Q_n(S)) = 2^m,$$

где m *— некоторое целое неотрицательное число, не превышающее размерности* n*.*

3. РЕБЕРНОЕ, РЕБЕРНОЕ ПРЕДПИСАННОЕ И ТОТАЛЬНОЕ ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА КУБОПОДОБНОГО ГРАФА

Теорема 3.1. Для реберного хроматического числа кубоподобного графа $Q_n(S)$ имеет место равенство $\chi_e(Q_n(S)) = \Delta(Q_n(S))$.

Доказательство. Как сказано выше, в случае, если S содержит в точности один элемент, граф $Q_n(S)$ — это паросочетание, которое есть монохроматический класс множества ребер исходного графа. Можно выделить в точности |S| таких монохроматических классов, т. е. $\chi_e(Q_n(S)) = |S|$. С другой стороны, $|S| = \Delta(Q_n(S))$, тем самым доказано, что

$$\chi_e(Q_n(S)) = \Delta(Q_n(S)).$$

Лемма 3.2. Кубоподобный граф $Q_n(S)$ может быть разложен на конечное число двудольных суграфов.

Доказательство. В силу выше доказанного утверждения, если множество S состоит из двух элементов ($|S| = 2$), то $Q_n(S)$ — двудольный. Тогда S произвольной длины может быть разложено на $\lceil \frac{|S|}{2} \rceil$ непересекающихся подсемейств семейства S. Иными словами, произвольный кубоподобный граф может быть разложен на $\lceil \frac{|S|}{2} \rceil$ двудольных графов. Лемма доказана.

Теорема 3.3. Для реберного предписанного хроматического числа кубоподобного графа $Q_n(S)$ имеет место равенство

$$\chi_{el}(Q_n(S)) = \Delta(Q_n(S)).$$

Доказательство. Из предыдущей леммы для некоторого l имеем

$$Q_n(S) \cong \bigcup_{i=1}^{l} Q_n(S_i),$$

где $\forall i : S_i \subseteq S$ и $\bigcup_{i=1}^{l} S_i = S$, причем полагаем $\forall i, j : S_i \cap S_j = \emptyset$.
Положим
$$G_i = Q_n(S_i).$$
Каждый G_i является двудольным. Воспользовавшись теоремой Гэлвина (Galvin) [8], получим, что ребра каждого G_i могут быть окрашены списками цветов длины
$$\Delta(G_i) = \Delta_i = |S_i|.$$
Множество элементов таких списков обозначим через Λ_i.
Предположив, что
$$\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$$
при $i \neq j$, получим возможность окрасить каждое ребро графа $Q_n(S)$ списком длины
$$\Delta(Q_n(S)) = \sum_{i=1}^{l} \Delta_i.$$
Доказано требуемое равенство.

Подмножество элементов графа будем называть *тотально независимым*, если никакие два его элемента не являются смежными и/или инцидентными никаким другим объектам этого же множества. *Тотальным хроматическим числом* $\chi_t(G)$ называется наименьшее число цветов нужное для раскраски элементов $V(G) \cup E(G)$ так, чтобы любое одноцветное множество элементов было тотально независимым. Визинг [1, 2] и Бехзад (Behzad) [5] более 35 лет назад предположили, что для обыкновенных графов справедливо
$$\chi_t(G) \leq \Delta(G) + 2.$$
Позднее эта гипотеза получила название гипотезы о тотальной раскраске и была обобщена для мультиграфов (см. [13, 3, 4, 9]). Следущая теорема подтверждает не только справедливость этой гипотезы для кубоподобных графов, но и демонстрирует достижимость ее оценок для нетривиальных графов этого класса.

Теорема 3.4. Для тотального хроматического числа кубоподобного графа $Q_n(S)$ имеют место следующие неравенства
$$\Delta(Q_n(S)) + 1 \leq \chi_t(Q_n(S)) \leq \Delta(Q_n(S)) + 2.$$
Более того, обе оценки точные на нетривиальных кубоподобных графах для $n \geq 3$.

Доказательство. Докажем верхнюю оценку

$$\chi_t(Q_n(S)) \leq \Delta(Q_n(S)) + 2.$$

Пусть C — множество цветов, причем $|C| = \Delta(Q_n(S)) + 2$. Произведем раскраску вершин данного графа цветами из C. Каждому ребру данного графа припишем список длины $\Delta(Q_n(S))$, полученный выбрасыванием из множества C элементов, использованных при раскраске концевых вершин ребра, т. е. для некоторого ребра (x, y) список цветов будет иметь вид

$$\Lambda_{(x,y)} = C \setminus \{c(x), c(y)\},$$

где $c(x), c(y)$ — цвета вершин x и y. Таким образом, каждое ребро будет окрашено списком длины $\Delta(Q_n(S))$.

Рассмотрим замкнутую окрестность $N[x]$ вершины x. В раскраске вершин $N[x]$ участвует не более чем $\Delta + 1$ цветов, т. е. по крайней мере один из цветов множества C, скажем c_1, входит в каждый список $\Lambda_{(x,y)}$, где $y \in N(x)$. Этот цвет допустим для раскраски любого из ребер вида $\{(x, y),\ y \in N(x)\}$. Выберем произвольно $z_1 \in N(x)$, а затем припишем ребру (x, z_1) цвет c_1 и удалим его из списков цветов всех ребер, инцидентных вершине x. Рассмотрим теперь подграф, порожденный множеством вершин $N[x] \setminus \{z_1\}$. Ясно, что в списках цветов его ребер найдется цвет c_2 такой, что

$$c_2 \in \bigcap_{y \in N(x) \setminus \{z_1\}} \Lambda_{(x,y)} \setminus \{c_1\}.$$

Повторяя описанную процедуру в точности Δ раз, получим раскраску всех ребер, инцидентных вершине x. После этого перейдем к произвольной вершине $y \in N(x)$ и повторим всю последовательность действий для нее с учетом того, что одно или несколько ребер уже раскрашено. Это значит, что цвета, уже использованные для окраски этих ребер, не могут рассматриваться в качестве допустимых. Продолжая двигаться некоторым образом по вершинам графа, получим его правильную тотальную раскраску не более чем в $\Delta(Q_n(S)) + 2$ цветов.

Доказательство нижней оценки основано на том простом факте, что вершина максимальной степени $\Delta(Q_n(S))$ и инцидентные ей ребра должны быть окрашены разными цветами.

Тотальная раскраска пустого и полного $2k$–вершинного графов (см. утверждения 1.2 и 1.3) возможна в один и в $2k{+}1$ цветов соответственно.

Эти тривиальные графы показывают достижимость нижней и верхней оценок.

В качестве нетривиальных кубоподобных графов возьмем полный двудольный граф $K_{n,n}$, n–мерный куб Q_n и декартово произведение $K_n \times K_2$. Для первого из графов $K_{n,n}$ в качестве S можно взять $\mathcal{P}_o(U)$ все подмножества из U нечетной мощности, для последнего из графов $K_n \times K_2$ в случае $n = 2^k$ в качестве S можно взять объединение $\mathcal{P}(U)$ всех подмножеств из $U = \{1, 2, ...k\}$ и $\{k+1\}$.

Утверждение 3.5. Для тотального хроматического числа графа $K_{n,n}$ имеет место следующее равенство:

$$\chi_t(K_{n,n}) = \Delta(K_{n,n}) + 2 = n + 2.$$

Доказательство. Докажем нижнюю оценку

$$\chi_t(K_{n,n}) \geq \Delta(K_{n,n}) + 2.$$

Максимальное тотально независимое множество графа $K_{n,n}$ имеет мощность не более чем n. Подсчитаем количество элементов в $K_{n,n}$:

$$|V(K_{n,n})| + |E(K_{n,n})| = 2n + \Delta(K_{n,n}) \cdot \frac{|V|}{2} = 2n + n^2 = n(n+2) = n(\Delta+2).$$

Поскольку максимальное тотально независимое множество есть максимальный монохроматический класс при правильной тотальной раскраске данного графа, справедливо отношение

$$\chi_t(K_{n,n}) \geq \frac{n(\Delta + 2)}{n}$$

или

$$\chi_t(K_{n,n}) \geq \Delta + 2.$$

Следующее неравенство получается из правильной тотальной раскраски, где каждую долю красим своим цветом и затем ребра красим в Δ цветов.

$$\chi_t(K_{n,n}) \leq \Delta(K_{n,n}) + 2.$$

Откуда, объединяя два полученных неравенства, имеем

$$\chi_t(K_{n,n}) = \Delta + 2.$$

Предложение доказано.

Утверждение 3.6. Для тотального хроматического числа графа n–мерного куба Q_n и $n \geq 3$ имеет место следующее равенство:

$$\chi_t(Q_n) = \Delta(Q_n) + 1 = n + 1.$$

Причем только первые четыре цвета используются для раскраски всех вершин Q_n.

Доказательство. Отметим, что при $n = 1, 2$ справедливо противоположное равенство $\chi_t(Q_n) = \Delta(Q_n) + 2 = n + 2$.

Доказательство индукцией по n.

База индукции: для $n = 3$ тотальная раскраска Q_3 в четыре цвета следующая:

1 — вершины $\{\emptyset\}, \{1, 2, 3\}$ и ребра $(\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2, 3\}), (\{3\}, \{1, 3\})$;
2 — вершины $\{2\}, \{1, 3\}$ и ребра $(\{3\}, \{2, 3\}), (\{\emptyset\}, \{1\}), (\{1, 2\}, \{1, 2, 3\})$;
3 — вершины $\{3\}, \{1, 2\}$ и ребра $(\{\emptyset\}, \{2\}), (\{1\}, \{1, 3\}), (\{2, 3\}, \{1, 2, 3\})$;
4 — вершины $\{1\}, \{2, 3\}$ и ребра $(\{\emptyset\}, \{3\}), (\{2\}, \{1, 2\}), (\{1, 3\}, \{1, 2, 3\})$.

Допустим, справедливо индукционное предположение, сформулированное в предложении. Для тотальной раскраски Q_{n+1}, состоящего из двух копий Q_n и совершенного паросочетания, соответствующего подмножеству $\{n + 1\}$, в первой копии используем тотальную раскраску индукционного предположения, а во второй — тотальную раскраску с переименованием цветов согласно перестановке

$$\pi = (1, 2, 3, 4)(5)...(n)(n + 1),$$

цвет $n + 2$ использован для раскраски совершенного паросочетания, соответствующего подмножеству $\{n + 1\}$. Предложение доказано.

Утверждение 3.7. Для тотального хроматического числа графа $K_n \times K_2$ и $n \geq 3$ имеет место следующее равенство:

$$\chi_t(K_n \times K_2) = \Delta(K_n \times K_2) + 1 = n + 1.$$

Доказательство. В силу того, что нижняя оценка тривиальна, остановимся на построении тотальной раскраски, лежащей в основе верхней оценки. Рассмотрим два случая: (a) n — нечетно, (b) n — четно.

Случай (a). $n = 2k + 1$ — нечетно.
Представим вершины первой и второй копий K_n как вершины правильного n–угольника соответственно $\{x_0, x_1, ..., x_{2k}\}$ и $\{y_0, y_1, ..., y_{2k}\}$. Индексы в описанной ниже раскраске рассматриваются по модулю $2k + 1$.

Тотальная раскраска $K_{2k+1} \times K_2$ в $2k+2$ цвета следующая:
цвет $2k+1$ — вершин нет, а ребра $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{2k}, y_{2k})$;
цвет $i, i \in \{0, 1, ..., 2k\}$ — вершины x_i, y_{i+1} и ребра (x_{i-1}, x_{i+1}), $(x_{i-2}, x_{i+2}), ..., (x_{i-k}, x_{i+k}), (y_i, y_{i+2}), (y_{i-1}, y_{i+3}), ..., (y_{i-k+1}, y_{i+k+1})$.

Случай (b). $n = 2k$ — четно.
Представим вершины первой и второй копий K_n как вершины правильного n–угольника соответственно $\{x_0, x_1, ..., x_{2k-1}\}$ и $\{y_0, y_1, ..., y_{2k-1}\}$. Индексы в описанной ниже раскраске рассматриваются по модулю $2k$.

Тотальная раскраска $K_{2k} \times K_2$ в $2k+1$ цвета следующая:
цвет $2k$ — вершин нет, а ребра $(x_0, x_k), (x_1, x_{k+1}), ..., (x_{k-1}, x_{2k-1})$, $(y_0, y_k), (y_1, y_{k+1}), ..., (y_{k-1}, y_{2k-1})$.

Если $k = 2t$ — четно, то множество элементов в монохроматическом классе следующее:
цвет $i, i \in \{0, 1, ..., 2k-1\}$ — вершины x_{i+t}, y_{i-t} и ребра (x_{i+2t-1}, x_{i+1}), $(x_{i+2t-2}, x_{i+2}), ..., (x_{i+t+1}, x_{i+t-1}), (x_{i+2t}, x_{i-1}), (x_{i+2t+1}, x_{i-2}), ...$
$..., (x_{i+3t-1}, x_{i-t}), (y_{i+2t+1}, y_{i-1}), (y_{i+2t+2}, y_{i-2}), ..., (y_{i+3t-1}, y_{i-t+1})$, $(y_{i+2t}, y_{i+1}), (y_{i+2t-1}, y_{i+2}), ..., (y_{i+t+1}, y_{i+t}), (x_i, y_i)$.

Если $k = 2t+1$ — нечетно, то множество элементов в монохроматическом классе следующее:
цвет $i, i \in \{0, 1, ..., 2k-1\}$ — вершины x_{i+t+1}, y_{i-t-1} и ребра (x_{i+2t+1}, x_{i+1}), $(x_{i+2t}, x_{i+2}), ..., (x_{i+t+2}, x_{i+t}), (x_{i+2t+2}, x_{i-1}), (x_{i+2t+3}, x_{i-2}), ...$
$..., (x_{i+3t+1}, x_{i-t}), (y_{i+2t+1}, y_{i-1}), (y_{i+2t+2}, y_{i-2}), ..., (y_{i+3t}, y_{i-t})$, $(y_{i+2t}, y_{i+1}), (y_{i+2t-1}, y_{i+2}), ..., (y_{i+t+1}, y_{i+t}), (x_i, y_i)$.

Предложение доказано.

Утверждение 3.5 подтверждает достижимость верхней оценки теоремы 3.4, любое из следующих утверждений 3.6 и 3.7 подтверждает достижимость нижней оценки теоремы 3.4. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что утверждение 3.5 и случай (a) утверждения 3.7 появились ранее в [6], а здесь приведены для полноты.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании некоторых алгебраических свойств симметрической разности удалось получить необходимое и достаточное условие существования клики и/или независимого множества, а также подсчитать величину характеристик кубоподобного графа, таких как плотность, неплотность, кликоматическое число. Помимо того найдено точное значение реберного хроматического и реберного предписанного хроматического чисел. Для тотального хроматического числа подтверждена гипотеза Визинга–Бехзада (Behzad) и показана точность верхней и нижней оценок как для тривиальных, так и для нетривиальных кубоподобных графов. Представляется перспективным дальнейшее исследование кубоподобного графа на предмет получения оценки или, что лучше, точного значения хроматического числа кубоподобного графа, а также отыскание критерия, когда кубоподобный граф имеет тотальное хроматическое число равное его максимальной степени плюс единица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p–графа // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. — Вып. 3. — С. 25–30.
2. **Визинг В. Г.** Хроматический класс мультиграфа // Кибернетика. — 1965. — № 3. — С. 29–39.
3. **Визинг В. Г.** Некоторые нерешенные задачи в теории графов // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, вып. 6. — С. 125–141.
4. **Зыков А. А.** Теория конечных графов. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1969. — 544 с.
5. **Behzad M.** Graphs and their chromatic number. — Ph. D. Thesis, Michigan State University, 1965.
6. **Behzad M., Chartrand G., Cooper J. K.** The color number of complete graphs // J. London Math. Soc. — 1967. — Vol. 42. — P. 226–228.
7. **Dvorjak T., Havel I., Labordee J. M., Leibl P.** Generalized hypercubes and graph embedding with dilation // Rostock Math. Colloq. — 1990. — Vol. 39. — P. 13–20.
8. **Galvin F.** The list chromatic index of a bipartite multigraph // J. Comb. Theory. Ser. B. — 1995. — Vol. 63, № 1. — P. 153–158.
9. **Jensen Tommy R., Toft B.** Graph Coloring Problems. — N.-Y.: J. Wiley & Sons, 1995. — 295 p. — (Wiley–Interscience Ser. in Discrete Mathematics and Optimization; Vol. XIX).
10. **Linial N., Meshulam R., Tarsi M.** Mathroidal biections between graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. — 1988. — Vol. 45, № 1. — P. 31–44.
11. **Payan C.** On the chromatic number of cube–like graphs // Discrete Math. — 1992. — Vol. 103, № 3. — P. 271–277.
12. **Sokolova M.** The chromatic number of extended odd graph is four // Časopis Pešt. Mat. — 1987. — Vol. 112, № 3. — P. 308–311.
13. **Zykov A. A.** Problem 12. // **Sachs H., Voss H.–J., Walther H.** Beiträge zur Graphentheory vorgetragen auf dem Internationalen Kolloquium in Manebach DDR. — 1967. — 228 p.