ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ЧЕРЧА-РОССЕРА И РАЗРЕШИМЫЕ СВОЙСТВА ОБРАБОТКИ ДЕРЕВЬЕВ

А.В.Анисимов

Киев, СССР

Во время многочисленных дискуссий, имевших место на этом симпозиуме,много раз звучал тезис о пользе привлечения алгебраических методов для изучения алгоритмов. Также много раз подчёркивалась польза подхода, при котором алгоритмы рассматриваются без отрыва от среды, на которой они действуют. Достаточно вспомнить название известной книги Н.Вирта "Алгоритмы + Структуры данных = Программы". В настоящем докладе мы приводим пример исследования, убедительно подтверждающего правоту этих двух тезисов.

Объектом исследования являются преобразователи, совершающие обходы структур типа дерево. При этом преобразователю разрешается изменять информацию, хранимую в вершинах дерева, и совершать переходы не только от отца к сыну, но и от сына к отцу. Причем процесс преобразования может происходить недетерминированно. Подобные преобразователи являются моделями лисповских программ сборки мусора, программ обработки баз данных и многих программ в системах искусственного интеллекта. Так как в последовательных проходах по дереву допускаются переходы в двух направлениях - сверху-вниз и снизу-вверх, то удобно деревья рассматривать как более общие структуры данных - свободные группы. При этом алгебраическая структура деревьев оказывается достаточно богатой и это позволяет промоделировать преобразователями указанного вида многие задачи, так или иначе связанные с деревьями. Используя общую теорему о разрешимости распознавания свойства Чёрча-Россера для локально-конечных отмечающих преобразователей над свободной группой, удаётся единым образом доказать разрешимость многих свойств обработки деревьев, доказываемых ранее в каждом случае независимо с привлечением специальной техники.

Пусть $\mathcal{B}$ – произвольная информационная область, $X = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ – алфавит отметок, $\mu: \mathcal{B} \to X$ – отмечающая функция, $Y=\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ – алфавит базисных преобразований на $\mathcal{B}$, $y_i: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Недетерминированным отмечающим дискретным преобразователем над $\mathcal{B}$ называется система $A=(\mathcal{A}, a_0, X, Y, Z, R, F)$, где $\mathcal{A}$ – конечное множество состояний, $a_0 \in \mathcal{A}$ – начальное состояние, $Z=\langle z_1, \ldots, z_q \rangle$ – алфавит дополнительных меток, R – конечное множество правил вида $axz \to a'yz'$ $a, a' \in \mathcal{A}; x \in X$, $y \in Y$, $z, z' \in Z \cup \langle \varepsilon \rangle$ ε – пустое слово; $F \subseteq \mathcal{A}$ – множество заключительных состояний. Интерпретация правила $axz \to a'yz'$ из R состоит в следующем. Если преобразователь A находится в состоянии a и обрабатывает элемент b с меткой $\mu(b)=x$ и дополнительной меткой z, то A может совершить действие: изменить в b дополнительную метку z на z', перейти в новое состояние a' и начать обрабатывать элемент by. Предполагаем, что в начале работы любой элемент b из $\mathcal{B}$ содержит пустую дополнительную метку ε.

Таким образом, отмечающие преобразователи имеют возможность запоминать в элементах обрабатываемой среды некоторую информацию, которая затем может влиять на поведение преобразователя при повторных прохождениях отмеченных элементов.

Если в процессе работы преобразователя возможность введения дополнительных отметок не используется, то преобразователь называем читающим.

Везде в этой работе, если не оговорено противное, под преобразователем понимаем недерминированный отмечающий дискретный преобразователь.

Пусть A – отмечающий преобразователь над $\mathcal{B}$. Так как A недетерминирован, то существует множество процессов, которые A может реализовать. Считаем, что процесс, реализуемый A заканчивается, если преобразователь переходит в состояние a, обозревает элемент из $\mathcal{B}$ с отметками x и z и для тройки axz нет соответствующей правой части среди правил из R.

Результатом применения преобразователя A к элементу b при начальной функции отметок μ назовем множество $A_\mu(b)$, состоящее из всех элементов c из $\mathcal{B}$, таких, что начав работу с обработки элемента b, преобразователь может перейти в с и остановиться в одном из состояний из F .

Если существует бесконечный процесс, начинающийся применением A к b , то считаем, что особый элемент ∞ принадлежит $A_\mu(b)$.

Преобразователь A называется локально конечным, если при любой его реализации число посещений произвольного элемента из $\mathcal{L}$ ограничено константой, постоянной при любом выборе функции μ.

Преобразователь A называется преобразователем Чёрча-Россера, если для всех функций μ и любых элементов b множество $A_\mu(b)$ состоит из одного элемента.

Преобразователи Чёрча-Россера обобщают понятие систем Чёрча-Россера [7], интерес к которым за последнее время увеличился в связи с развитием теории оптимизационных преобразований. Теория преобразователей Чёрча-Россера рассмотрена в работе [3].

Отмечающий преобразователь над свободной группой обобщает понятие машины Тьюринга, так как двусторонняя лента представляет собой не что иное как бесконечную циклическую группу. В теории тьюринговых вычислений хорошо известна теорема Трахтенброта-Хенни, утверждающая, что вычисления с протоколами конечной длины могут быть выполнены односторонним конечным автоматом, и поэтому проблема эквивалентности таких вычислений разрешима. При переходе к древовидным структурам ситуация значительно усложняется. В 1968 году А.А.Летичевский [4], [5] доказал, что для читающих преобразователей над почти свободной группой проблема эквивалентности разрешима. Класс почти свободных групп (β-групп) содержит конечные и свободные группы и замкнут относительно операции свободного произведения. Оказалось [5], что почти свободные группы совпадают с группами, задающимися конечно-свободными языками, введенными в [1].

Слегка изменив технику, развитую А.А.Летичевским, можно доказать аналогичный результат для отмечающих преобразователей, который можно рассматривать как обобщение теоремы Трахтенброта-Хенни.

Т е о р е м а I. Для локально конечных отмечающих преобразователей над почти свободными группами проверка выполнимости свойства Чёрча-Россера эффективно разрешима.

Доказательство теоремы I проводится аналогично доказательству А.А.Летичевского разрешимости проблемы эквивалентности для детерминированных преобразователей над почти свободными группами. При этом вместо сравнения двух преобразователей рассматривается произвольная пара процессов, реализуемых преобразователем. Из условия локальной конечности следует конечность следов в каждой точке, а это позволяет использовать аналог леммы об удалениях и вставках. Возможность расстановки дополнительных отметок не нарушает возможности удаления и вставок внутри каждого процесса. Таким образом, проверка выполнимости свойства Чёрча-Россера сводится к проверке выполнимости этого свойства для всех интерпретаций внутри некоторой ограниченной окрестности.

Перейдём теперь к следствиям теоремы I.

Следствие I. Проблема эквивалентности для детерминированных отмечающих локально конечных преобразователей над почти свободными группами разрешима.

Очевидно, что по двум детерминированным преобразователям A_1 и A_2 можно построить недетерминированный преобразователь A, который в начальном состоянии недетерминированно передаёт управление либо A_1, либо A_2, а затем функционирует согласно выбранному процессору. Преобразователь A обладает свойством Чёрча-Россера тогда и только тогда, когда A_1 и A_2 функционально эквивалентны.

Рассмотрим преобразователи над почти свободной группой, дополненной правым нулём.

Пусть G - почти свободная Y-группа, (G, ω) - группа G, дополненная правым нулём ω, т.е. $t\omega = \omega$ для всех $t \in G \cup \langle\omega\rangle$. Пусть w - новый символ, не принадлежащий алфавиту образующих группы G, $G*\{w\}$ -свободное произведение G и $\{w\}$, A - детерминированный читающий преобразователь над (G, ω). Используя возможность запоминания в элементах из $\mathcal{L}$ меток совершаемых Y-переходов, действие ω на элемент t легко промоделировать бэктрэкингом из t в w. Таким образом, преобразователь A моделируется отмечающим детерминированным преобразователем A_ω над $G*\{w\}$. Так как A - детерминированный читающий преобразователь, то он не может проходить без зацикливания любой элемент из $G \cup \langle \omega \rangle$ более чем k раз, где k - число состояний. Поэтому A_ω является локально конечным. Получаем следующий результат.

Следствие 2. Проблема эквивалентности детерминированных читающих преобразователей над почти свободной группой, дополненной правым нулём, разрешима.

Следствие 3. Проблема эквивалентности детерминированных читающих преобразователей над свободной полугруппой с правым нулём разрешима.

Очевидно, что свободная полугруппа вложима в свободную группу. Остаётся применить следствие 2.

В работе [10] доказана разрешимость проблемы функциональной эквивалентности в классе JP-схем - схем Янова, дополненных памятью типа pushdown . Работу JP-схемы можно представить как прохождение с использованием стэка по дереву, порождённому термами одноаргументных функциональных констант. При этом стэк нужен для реализации возвратов в некоторые уже пройденные вершины. Погрузив дерево в свободную группу и используя возможность расстановки дополнительных отметок, работу JP-схемы можно промоделировать детерминированным отмечающим преобразователем над свободной группой. Локальная конечность следует из важности распознавания зацикливания на одном и том же элементе.

Следствие 4. [10] В классе JP-схем разрешима проблема эквивалентности.

Рассмотрим теперь теорию конечных автоматов на конечных деревьях [8], [9], [12] .

При рассмотрении автоматов на деревьях свойство распознаваемости дерева формируется в терминах параллельного пробега недетерминированного автомата по отмеченному дереву. Параллельный пробег по дереву можно промоделировать обходом типа перебора вглубину (depth-first search). При этом в каждой вершине дерева расставляется информация о выборе варианта продолжения пути. Осуществление возвратов за счёт неудачных выборов вариантов реализуется за счёт вложения дерева в свободную группу. Локальная конечность моделирующего отмечающего преобразователя следует из свойств перебора в глубину. Таким образом, получаем следующий результат.

С л е д с т в и е 5. [8], [9]. Проблема эквивалентности конечных автоматов над конечными деревьями разрешима.

Аналогичным образом легко доказать разрешимость структурной эквивалентности кс-грамматик, доказанную в [II], и другие подобные результаты.

Подробное доказательство следствия 5 изложено в [2].

Л и т е р а т у р а

I. Анисимов А.В. О групповых языках. - Кибернетика, Киев, I97I, № 4.

2. Анисимов А.В. Дискретные преобразователи с возвратами. - Кибернетика, Киев, I979, № 6.

3. Глушков В.М., Анисимов А.В. Преобразователи Чёрча-Россера.- Кибернетика, Киев, I979, № 5.

4. Летичевский А.А. Эквивалентность автоматов относительно полугрупп. - В сб. Теоретическая кибернетика, ИК АН УССР, I970, вып. 6.

5. Летичевский А.А., Смикун Л.Б. О классах групп с разрешимой проблемой эквивалентности автоматов. ДАН СССР, М., I976, № I.

6. Летичевский А.А. Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием относительно свободной полугруппы с правым нулём. ДАН СССР, М., I968, № 5.

7. Aho A.V., Sethi R., Ullman J.D. Code optimization and finite church - Rosser Systems, in:the book "Design and Optimization of Compilers", Prentice Hall, USA, 1972.

8. Donner J.E. Decidability of the weak second-order theory of two successors, Abstract 65T - 468 "Notes of the American Mathematical Society", v.12, 1965.

9. Thatcher J.W., Wright J.B. Generalised finite automata theory with an application to a decision problem of second order logic, Mathematical Systems Theory, v.2, no.1, 1968.

10. Tokura N., Kasami T., Furuta S. Ianov schemes augmented by a pushdown memory, IEEE 15th Annual Symposium on Switching and Automata Theory, New Orleans, USA, 1974.

11. Paul M.C., Unger S.H. Structural equivalence of context-free grammars, "Journal of Computer and System Sciences" v.2, no.4, 1968.
12. Rabin M.O. Decidability of second - order theories and automata on infinite trees, Transactions of the American Mathematical Society, v.141, no.7, 1969.