РОЛЬ ПОНЯТИЯ АЛГОРИФМА В СЕМАНТИКЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЯЗЫКОВ

Н.А.Шанин

Ленинград, СССР

§ 1. Математическая деятельность, даже в рамках аксиоматических (формально-дедуктивных) теорий, обычно развертывается на основе некоторых представлений о с м ы с л е (в другой терминологии - о семантике) математических суждений, формулируемых на используемом в данной конкретной ситуации языке. Ограничимся рассмотрением таких ситуаций, когда используются логико-математические языки первой ступени с предметными, функциональными и предикатными константами и с переменными лишь одного типа - предметными переменными. В математических теориях с конечным множеством допустимых значений предметных переменных (с конечной предметной областью) интуитивные представления о смысле математических суждений уточняются общеизвестным способом на основе интерпретации пропозициональных логических связок $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ как булевых функций и кванторов общности $\forall$ и существования $\exists$ как символов для обозначения к о н е ч н ы х конъюнкций и дизъюнкций специальных видов. При переходе к математическим теориям с бесконечными предметными областями (например, к арифметике, имеющей своей предметной областью множество натуральных чисел) уточнение интуитивных представлений о смысле суждений становится, как известно, "тяжелой" задачей по соображениям принципиального характера. Допускаемая в теоретико-множественной (в другой терминологии - классической) математике "прямая" экстраполяция упомянутого понимания кванторов $\forall$ и $\exists$, состоящая, по существу, в интерпретации их как символов для обозначения "бесконечных конъюнкций" и "бесконечных дизъюнкций" специальных типов, использует абстракцию актуальной бесконечности, то есть такую идеализацию, которая на протяжении всей истории математики, начиная с античного периода, и в настоящее время вызывала и вызывает критику, как чрезмерный произвол человеческого воображения.

Ниже речь будет идти лишь об арифметических языках и лишь о таких подходах к истолкованию арифметических суждений, при которых "полет воображения" остается в рамках более осторожной идеализации-абстракции потенциальной осуществимости (потенциальной бесконечности). В этих подходах понятие алгорифма играет фундаментальную роль.

§ 2. В дальнейшем изложении мы будем иметь дело, в основном, с двумя арифметическими языками: языком классической арифметики $\mathcal{L}^{cl}$ и языком конструктивной арифметики $\mathcal{L}^{con}$. Атомарными формулами этих языков являются выражения вида $(\mathcal{U}=\mathcal{V})$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – примитивно-рекурсивные термы, то-есть термы, получаемые традиционным способом из натуральных чисел $0, 0|, 0||, \ldots$ (для определённости мы будем иметь дело с натуральными числами единиричной числовой системы), предметных переменных и символов примитивно-рекурсивных функций. Язык $\mathcal{L}^{cl}$ имеет логические связки $\neg, \&, \rightarrow, \forall$; к ним добавляются в качестве производных логических связок классическая дизъюнкция $\dot{\vee}$, классический квантор существования $\dot{\exists}$ и эквивалентность $\longleftrightarrow$:

$$(P \dot{\vee} Q) \leftrightharpoons \neg(\neg P \& \neg Q), \quad \dot{\exists} x R \leftrightharpoons \neg \forall x \neg R,$$
$$(P \longleftrightarrow Q) \leftrightharpoons ((P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P))$$

(знак $\leftrightharpoons$ заменяет слова « вводится в качестве обозначения »).

Язык $\mathcal{L}^{con}$ получается из $\mathcal{L}^{cl}$ в результате присоединения брауэровского квантора существования (квантора потенциальной осуществимости) $\exists$ и присоединения в качестве производной логической связки брауэровской дизъюнкции $\vee$:

$$(P \vee Q) \leftrightharpoons \exists x(((x=0) \rightarrow P) \& (\neg(x=0) \rightarrow Q))$$

[здесь x не входит свободно в P и Q]. Согласно Л.Э.Я.Брауэру, истолкование суждения*) вида $\exists x R$ сводится к истолкованию условия R посредством следующего согла-

---

*) Формула F логико-математического языка называется суждением, если не существует свободных вхождений переменных в F.

шения: $\exists x R$ понимается как утверждение о потенциальной осуществимости натурального числа, удовлетворяющего условию R. Предъявление "в готовом виде" некоторого натурального числа N и обоснование суждения $\llcorner R \updownarrow^{x}_{N} \lrcorner$, конечно, составляют обоснование суждения $\exists x R$. (Выражение $\llcorner F \updownarrow^{\alpha}_{\mathfrak{U}} \lrcorner$, где F - формула, α - предметная переменная и $\mathfrak{U}$ - терм, обозначает результат подстановки терма $\mathfrak{U}$ вместо всех свободных вхождений α в F). Однако в математических теориях, использующих абстракцию потенциальной осуществимости, естественно признавать приемлемым не только такое, но и более абстрактное обоснование, слагающееся из задания (например, в виде конкретной нульместной рекурсивной функции) способа развертывания некоторого конструктивного детерминированного процесса и из обоснования того, что процесс заканчивается, его результатом является натуральное число и этот (потенциально осуществимый) результат удовлетворяет условию R.

А.А.Марков обратил внимание (см. [1], [2]) на следующее обстоятельство: если R - алгорифмически проверяемое условие, то для обоснования суждения $\exists x R$ нет необходимости (в принципе) изобретать какой-либо специальный процесс указанного типа - таким процессом всегда может служить процесс поиска наименьшего корня условия R, состоящий в проверке выполнения условия R последовательно для чисел $0, 01, 011, \ldots$ и заканчивающийся после такого шага, на котором получается утвердительный ответ. Таким образом, при упомянутом ограничении на условие R суждение $\exists x R$ эквивалентно суждению: « процесс поиска наименьшего корня условия R заканчивается ».

"Наглядный" смысл суждения о завершаемости того или иного алгорифмического процесса (процесса применения некоторого алгорифма к конкретному исходному данному) непосредственно указывает "абсолютно убедительный" способ обоснования такого суждения, состоящий в фактическом развертывании процесса до завершающего шага. Однако такой способ обоснования фактически реализуем лишь в случае короткого алгорифмического процесса, и, кроме того, он не поддаётся экстраполяции на суждения о полноте (в другой терминологии – о тотальности) какого-либо алгорифма, то-есть о завершаемости *всех* алгорифмических процессов, соответствующих предусмотренным для данного алгорифма исходным данным. Очевидно, что в математической теории алгорифмов неизбежно апеллирование к критериям, имеющим форму *теоретического предсказания* о завершаемости алгорифмического процесса при наличии таких-то сведений о рассматриваемом процессе. А.А. Марков сформулировал следующий *логический критерий:* если какой-либо алгорифмический процесс не является неограниченно продолжающимся (то-есть если предположение о неограниченной продолжаемости рассматриваемого процесса посредством убедительного рассуждения приводимо к противоречию), то процесс заканчивается.

Если R – алгорифмически проверяемое условие, то формула $\forall x \neg R$ выражает неограниченную продолжаемость процесса поиска наименьшего корня условия R. Объединение этого замечания и сформулированного выше логического критерия привело А.А.Маркова к *принципу конструктивного подбора*, который можно сформулировать следующим образом: каково бы ни было алгорифмически проверяемое условие R, всякое (убедительное) обоснование суждения $\neg \forall x \neg R$ является и обоснованием суждения $\exists x R$ и, следовательно, семантически приемлема эквивалентность

$$(\underset{\cdot}{\exists} x R \longleftrightarrow \exists x R).$$

Мы выделим класс $\mathcal{L}^0$ "непосредственно понятных" формул языка $\mathcal{L}^{con}$, состоящий из формул вида $\exists x \forall y \exists z A$, где A – бескванторная формула. Здесь подразумевается, что некоторые из кванторных комплексов $\exists x$, $\forall y$, $\exists z$ и даже все могут отсутствовать; в частности, любая бескванторная формула принадлежит $\mathcal{L}^0$. Аттестация формул, принадлежащих $\mathcal{L}^0$, как непосредственно понятных (при использовании абстракции потенциальной осуществимости), имеет следующие основания. В бескванторных формулах пропозициональные логические связки естественно понимать как булевы функции; при таком понимании бескванторные формулы, содержащие переменные, оказываются записями алгорифмически проверяемых условий. Последнее обстоятельство и сказанное выше дают возможность интерпретировать формулу $\exists z A$ вторым из упомянутых выше способов, то-есть как высказывание (или - при наличии свободных вхождений переменных - как высказывательную форму) вида «такой-то алгорифмический процесс заканчивается». Присоединение кванторного комплекса $\forall y$ приводит к формулированию обобщающего предсказания (быть может, со свободными вхождениями переменных) о завершаемости любого из тех алгорифмических процессов, которые соответствуют отдельным значениям переменной y. Истолкование формулы $\exists x \forall y \exists z A$ сводится к истолкованию формулы $\forall y \exists z A$ на основе исходного соглашения о семантике квантора $\exists$ (второй способ, вообще говоря, неприменим, так как может оказаться, что последняя формула выражает условие, не допускающее алгорифмической проверки). Сказанное выше дает определенные основания рассматривать "ситуации", описываемые формулами из класса $\mathcal{L}^{o}$, как охарактеризованные "сравнительно наглядно".

Язык $\mathcal{L}^{con}$, несмотря на "узость" множества фигурирующих в нем исходных функций в сравнении с множеством всех рекурсивных (в другой терминологии - частичных рекурсивных) функций и несмотря на отсутствие функциональных переменных, в действительности обладает большими выразительными возможностями. Например, в этом языке можно моделировать такое его расширение $\mathcal{L}^{con+}$, в котором кроме языковых объектов, имеющихся в $\mathcal{L}^{con}$, фигурируют еще символы любых рекурсивных функций и для каждого натурального числа n имеются функциональные переменные, допустимыми значениями которых считаются любые n-местные рекурсивные функции, а также фигурируют атомарные формулы видов $!\Phi$ и $(\Phi \simeq \Psi)$, где Φ и Ψ - рекурсивные (в другой терминологии - частичные рекурсивные) термы. Такие формулы читаются соответственно следующим образом: «процесс вычисления значения терма Φ заканчивается» и «значение терма Φ условно равно значению терма Ψ». Функциональные переменные языка $\mathcal{L}^{con+}$ можно заменить предметными переменными, зафиксировав алгорифмический метод кодирования (гёделеву нумерацию) всех слов в том алфавите, из букв которого строятся знакосочетания, задающие конкретные рекурсивные функции, и используя выражение $\{k\}_n$ в качестве символа n-местной рекурсивной функции, гёделев номер которой равен k (если k не является гёделевым номером какой-либо n-местной рекурсивной функции, то выражение $\{k\}_n$ рассматривается как символ такой n-местной рекурсивной функции, у которой процесс вычисления значения в любой точке продолжается неограниченно). Мы будем считать, что выражения вида $\{\mathcal{U}\}_n$, где $\mathcal{U}$ – рекурсивный терм, фигурируют в языке $\mathcal{L}^{con+}$ в роли функторных термов (т.е. термов, потенциально возможные значения которых представляют собой символы конкретных рекурсивных функций). Детали перевода языка $\mathcal{L}^{con+}$ в язык $\mathcal{L}^{con}$ "подсказывает" теорема С.К.Клини о нормальной форме рекурсивных функций (см. [3], § 63), утверждающая существование примитивно-рекурсивных функций τ_n и ν таких, что при всех значениях предметных переменных w, $t_1, \ldots, t_n$ верно условное равенство

$$(\{w\}_n(t_1,\ldots,t_n) \simeq \nu(\mu_s T_n(w,t_1,\ldots,t_n,s));$$

здесь $T_n(w,t_1,\ldots,t_n,s) \leftrightharpoons (\tau_n(w,t_1,\ldots,t_n,s)=0)$ и μ_s обозначает операцию поиска наименьшего числа среди тех значений переменной s, при которых выполняется условие, записываемое справа от μ_s. При этом, функция τ_n такова, что при всех значениях переменных верно утверждение

$$(T_n(w,t_1,\ldots,t_n,u) \& T_n(w,t_1,\ldots,t_n,v)) \longrightarrow (u=v).$$

Эта теорема С.К.Клини "подсказывает" (вместе с принципом конструктивного подбора), например, что переводами в язык $\mathcal{L}^{con}$ (даже в более узкий язык $\mathcal{L}^{cl}$) атомарных формул

$$!\{w\}_n(t_1,\ldots,t_n) \quad \text{и} \; (\{a\}_1(t) \simeq \{b\}_1(t)) \quad \text{языка}$$

$\mathcal{L}^{con+}$ можно считать соответственно формулы

$$\exists u\, T_n(w,t_1,\ldots,t_n,u) \quad \text{и} \; (\underset{\cdot}{\exists} u\, T_1(a,t,u) \leftrightarrow \underset{\cdot}{\exists} v\, T_1(b,t,v)) \&$$
$$\& \forall u \forall v ((T_1(a,t,u) \& T_1(b,t,v)) \longrightarrow (\nu(u)=\nu(v))).$$

§ 3. Обычный в среде математиков (и упомянутый в § 1) "способ понимания" суждений, формулируемых на том или ином языке к л а с с и ч е с к о й арифметики (для определенности будем иметь в виду язык $\mathcal{L}^{cl}$), имеет в своей основе апеллирование к "миру актуально бесконечных множеств". Именно такой "способ понимания" имеют в виду в классической математике, говоря о семантической приемлемости фактически используемых дедуктивных аппаратов классической арифметики. Наиболее употребительный из этих дедуктивных аппаратов (имеются в виду те случаи, когда используется язык $\mathcal{L}^{cl}$) слагается из бескванторного исчисления примитивно-рекурсивных равенств (см., например, [6]), постулатов (т.е. аксиом и правил вывода) классического исчисления предикатов первой ступени, касающихся логических связок $\neg, \&, \rightarrow, \forall$ и написанных применительно к языку $\mathcal{L}^{cl}$, а также постулата (в виде аксиомы или правила вывода), выражающего принцип полной индукции. Этот дедуктивный аппарат мы будем называть исчислением $\mathcal{C}^{cl}$. Семантическая приемлемость исчисления $\mathcal{C}^{cl}$ обосновывается рассуждением, апеллирующим к упомянутому "миру", как к источнику "интуитивных очевидностей", и завершающимся заключением об истинности любого суждения, выводимого средствами рассматриваемого дедуктивного аппарата.

Однако, "способ понимания" арифметических суждений, основанный на абстракции актуальной бесконечности, не удовлетворяет тех математиков, которые расценивают использование этой идеализации как чрезмерный произвол человеческого воображения. Вызванное к жизни такой критической точкой зрения конструктивное направление в математике (конструктивная математика) выдвигает в качестве одного из основополагающих принципов теоретического рассмотрения натуральных чисел и конструктивно определяемых (т.е. индивидуально задаваемых некоторыми знакосочетаниями) объектов иных конкретных типов требование ограничивать " полет воображения" абстракцией потенциальной осуществимости. Такое ограничение мотивируется стремлением перейти на уровень представлений, более "реалистичных", чем в канторовой теории множеств, с точки зрения получаемых из опыта знаний о материальных источниках формирования понятия натурального числа и иных конструктивных математических понятий. Естественно поставить вопрос: какую альтернативу (или какие альтернативы) традиционному "способу понимания" арифметических суждений может предложить конструктивное направление в математике?

В связи с последним вопросом прежде всего заметим, что в математической литературе термин «натуральное число» используется в нескольких смыслах. Для конструктивного направления в математике характерен "знаковый" вариант понимания этого термина - вариант, в котором (в отличие от теоретико-множественного варианта) упомянутым термином называются не какие-то "абстрактные объекты", которым приписывается одновременное существование в некоем "мире", а *потенциально осуществимые знакосочетания определенного типа* - те самые знакосочетания, которые в более абстрактном (теоретико-множественном) варианте называются обозначениями или представлениями натуральных чисел в некоторой фиксированной числовой системе, например, в единиричной, или позиционной десятичной и т.п. Переход от одной числовой системы к другой приводит к математической теории, эквивалентной первоначальной во всех отношениях, кроме тех, которые затрагивают *по существу* специфические особенности используемых числовых систем (этим особенностям при "обычном" изложении арифметики посвящается раздел о свойствах *представлений* натуральных чисел в конкретных числовых системах). Поэтому, избрав "знаковый" вариант и остановив свой выбор на какой-либо одной числовой системе (например, на единиричной), мы не рискуем "обеднить" арифметику.

Математик, "спустившийся" с уровня абстракции актуальной бесконечности на уровень абстракции потенциальной осуществимости, сталкивается с проблемой "переосмысления" языка $\mathcal{L}^{cl}$. При обсуждении этой проблемы необходимо иметь в виду, что традиционное математическое образование вырабатывает у человека ощущение "естественности" и "правомерности" общеупотребительного дедуктивного аппарата классической арифметики. Поэтому проблемой "переосмысления" языка $\mathcal{L}^{cl}$ целесообразно считать проблему формулирования такой семантики этого языка, в которой отсутствовало бы использование абстракции актуальной бесконечности и которая в то же время была бы согласована с привычным дедуктивным аппаратом классической арифметики (в частности, с исчислением $\mathcal{C}^{cl}$), т.е. удовлетворяла бы следующему условию: любое выводимое суждение истинно в смысле этой семантики. Однако теорема А.Тарского о неарифметизируемости понятия истинного арифметического суждения (см., например, [4], [5])[ж) предупреждает о наличии препятствий принципиального характера. Она говорит о том, что если мы к искомой семантике (в частности, к способу ее разъяснения) предъявим такое, казалось бы, умеренное требование, как возможность "выделения" гёделевых номеров истинных суждений посредством условия, выразимого в языке $\mathcal{L}^{cl}$ (или хотя бы в $\mathcal{L}^{con}$), то ничего не получим - любой кандидат на роль понятия « истинное арифметическое суждение », удовлетворяющий некоторым естественным для этого понятия условиям, непременно окажется "плохим" с точки зрения такого требования.

Некоторый подход к упомянутой проблеме "переосмысления" начал вырисовываться в процессе формирования идей интуиционистской математики. Эти идеи несовместимы с пониманием логических связок $\longrightarrow$ и $\neg$ (импликации и отрицания), как булевых функций. Понимание импликации, фактически вошедшее в обиход интуиционистской математики на начальных этапах её формирования, "навеяно" способом введения и исключения этой логической связки в процессах "естественного" логического вывода (включающих в себя, вообще говоря, введение и исключение допущений). Это понимание импликации п р и б л и з и т е л ь н о можно пояснить так: суждение, имеющее вид $(P \longrightarrow Q)$, понимается как утверждение о возможности обоснования (в каком-то конструктивном смысле) суждения Q при введении суждения P в качестве "исходного данного". Разъяснением суждения $\neg P$ считается импликация $(P \longrightarrow (0=01))$. В таком "духе" понимал суждения этих двух видов Л.Э.Я.Брауэр, в таком же "духе" понимают их А.Н.Колмогоров в [7][жж) и А. Гейтинг в [9], [10], а в работе [11] А.Н.Колмогоров предложил некоторый вариант частичного уточнения такого понима-

[ж) Из опубликованной недавно переписки К.Гёделя с Э.Цермело (см.[39]) видно, что уже в 1931 году К.Гёделю было известно о неарифметизируемости понятия истинного арифметического суждения.

[жж) В этой работе впервые был предложен и обсуждён с семантической точки зрения определённый формализованный фрагния на языке задач. Вопрос о том, какое понимание термина «обоснование» оказывается подходящим в рассматриваемом случае, длительное время оставался без отчетливого ответа (обсуждение этого вопроса можно найти, например, в [12], § 11). Однако поиски в этом направлении продолжались; в частности, плодотворными оказались некоторые понятия и идеи, предложенные П.Лоренценом в [13] (например, идея о том, что каждое вхождение в заданную формулу F знака $\longrightarrow$ или знака $\neg$ можно рассматривать как символ, принадлежащий определённой "ступени" иерархии импликаций, причем с ростом порядкового номера "ступени" последовательно видоизменяется понимание импликации).

Воплощение упомянутой выше "приблизительной" идеи интуиционистского понимания импликации в систематически построенную теорию было осуществлено А.А.Марковым (см. [14], [15-20]; А.А.Марков рассматривает язык, родственный по своему типу языку $\mathcal{L}^{c\ell}$, но отличающийся от него некоторыми деталями)*). Семантическую теорию А.А.Маркова можно назвать (в соответствии с её типом) ступенчатой семантической теорией с дедуктивным пониманием импликации и отрицания. Эта семантика, в согласии с упомянутой теоремой А.Тарского, характеризуется на основе сравнительно сложных понятий. В её описании используются как обычные индуктивные, так и обобщённые индуктивные определения, как формальные, так и полуформальные (т.е. использующие правило Карнапа) системы. Обобщённые индуктивные определения "расшифровываются" обычно посредством некоторого пояснения, апеллирующего существенным образом к интуиционистским представлениям о "свободно становящихся последовательностях" конструктивных объек-

мент дедуктивного аппарата интуиционистской (и конструктивной) логики - фрагмент, предвосхитивший ряд существенных особенностей построенных позже более широких дедуктивных аппаратов конструктивной математики (см. [8]).

*) Для формул, в которых фигурируют лишь импликации и отрицания, принадлежащие двум первым "ступеням", сравнительно простой по форме вариант семантики был предложен в [21] .

тов подходящего типа. Такие пояснения находятся за рамками конструктивной математики, поэтому использование обобщённых индуктивных определений в семантической теории А.А.Маркова вызывает ощущение, что эта теория "не вполне конструктивная". Однако с точки зрения деятельности, фактически происходящей в конкретных областях математики, развиваемых на основе "содержательных" соображений, нет необходимости принимать эту теорию в полной общности, так как для истолкования и семантического обоснования подходящих по своему типу теорем из "основного фонда" математики достаточны такие фрагменты рассматриваемой семантической теории, в которых фигурируют обобщённые индуктивные определения некоторых частных типов, а именно, определения посредством трансфинитной рекурсии по некоторым "начальным" шкалам конструктивных порядковых чисел (часто достаточна шкала порядковых чисел, меньших чем $\omega^{\omega^{\omega}}$, и лишь в "экзотических" случаях требуется выход за рамки порядкового числа ε_0).

В ступенчатой семантической теории отрицание определяется через импликацию. Общеупотребительный дедуктивный аппарат классической арифметики, признаваемый, как было отмечено выше, "контролером" приемлемости семантических определений, допускает и такой вариант, в котором отрицание рассматривается как исходная логическая связка, а импликация вводится в качестве производной логической связки посредством определения: $(P\to Q)\leftrightharpoons\neg(P\&\neg Q)$. Принимая этот вариант, мы принимаем такое редукционное понимание импликации, которое в некоторых отношениях ближе, чем в ступенчатой семантике (с дедуктивной импликацией), к пониманию ее "в духе" теории булевых функций, т.е. к такому пониманию, которое используется в математических теориях с конечными предметными областями (см.§ 1) и в бескванторных арифметических формулах (см.§ 2). Используя ряд эквивалентностей, выводимых средствами упомянутого дедуктивного аппарата (а также используя для "слияния" цепочек вида $\forall z_1 \forall z_2 \ldots$ $\ldots \forall z_n$ в один кванторный комплекс вида $\forall z$ двухместную примитивно рекурсивную функцию $\varkappa$, осуществляющую взаимно-однозначное отображение множества всевозможных пар натуральных чисел на множество всех натуральных чисел, и пару одноместных примитивно-рекурсивных функций $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, осуществляющую обратное отображение), можно по любой формуле F языка $\mathcal{L}^{cl}$ построить формулу F^*, имеющую вид

$$\forall y \,\dot{\exists} u_1 \forall v_1 \ldots \dot{\exists} u_k \forall v_k \,\dot{\exists} w \left(f(y, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k, w, z_1, \ldots, z_m) = 0 \right) \quad (\Delta)$$

(здесь $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, f – примитивно-рекурсивная функция, кванторные комплексы $\forall y$ и $\dot{\exists} w$ могут отсутствовать) и такую, что в $\mathcal{C}^{cl}$ выводима эквивалентность $(F \longleftrightarrow F^*)$ [вариант теоремы о приведении формул к предварённой нормальной форме]. После такой редукции рассматриваемой формулы F мы оказываемся перед проблемой истолкования соответствующей формулы вида (Δ).

Упомянутая выше теорема А.Тарского разрушает надежду на возможность "сравнительно простой" и в то же время "точной" семантики суждений вида (Δ),[*] однако она не исключает возможности построения иерархии "весьма простых" (например, выразимых в языке $\mathcal{L}^{o}$), но "приближенных" истолкований суждений вида (Δ) – иерархии, каждая ступень которой открыта для уточнений.

Ниже речь будет идти об одной такой иерархии, предложенной в [22]. При построении этой иерархии происходит выход за рамки языка $\mathcal{L}^{cl}$ – на некоторых шагах естественным образом появляются квантор потенциальной осуществимости $\dot{\exists}$ и формулы языка $\mathcal{L}^{con}$. Ввиду этого целесообразно рассматривать языки $\mathcal{L}^{cl}$ и $\mathcal{L}^{con}$ совместно.

§ 4. Исходным пунктом формирования семантических представлений, касающихся языка конструктивной арифметики $\mathcal{L}^{con}$,

---

[*]) Истолкование арифметических суждений вида (Δ), радикально отличающееся по своей идее от ступенчатой семантики с дедуктивной импликацией, но апеллирующее к теоретико-множественному понятию арифметической функции или – при некоторой модификации деталей – к интуиционистскому понятию свободно становящейся последовательности натуральных чисел, предложено Г.Крайзелем в [23]. Оно называется интерпретацией отсутствием контрпримера.

явилась предложенная Л.Э.Я.Брауэром редукция истолкования суждения вида $\exists x R$ к истолкованию условия R и соответствующая редукция для суждений вида $(P\vee Q)$ (см.§ 2). Однако вопрос об истолковании суждений, в которых формулы вида $\exists x R$ или вида $(P\vee Q)$ встречаются в качестве с о б с т в е н н ы х подформул (т.е. подформул, "глубина залегания" которых больше нуля), оказался трудным (прежде всего - как стало понятно позже - ввиду отсутствия в то время необходимой "опоры" в виде точного понятия алгорифма). Прояснение этого вопроса было достигнуто в результате "последовательных приближений" и заняло сравнительно много времени.

Заметим, что в истории математической логики формирование аппаратов логического вывода (или отдельных частей таких аппаратов) во многих случаях имело своей базой лишь весьма "расплывчатые" представления семантического характера и п р е д ш е с т в о в а л о уточнениям таких интуитивных представлений. При этом, часто случалось так, что при поисках уточнений исходных семантических представлений "уже готовые" и получившие признание (по соображениям интуитивного характера) дедуктивные аппараты фигурировали в роли некоторых ориентиров, а также в роли "контролеров" приемлемости тех или иных вариантов уточнений. Вообще, о разработке семантик математических языков можно сказать то же, что однажды сказал М.Борн о путях теоретической физики:«Мы ... отыскиваем свой путь посредством проб и ошибок, строя свою дорогу позади себя ...».

Например, истолкование пропозициональных логических связок, как булевых функций, появилось в о т ч е т л и в о м в и д е тогда, когда уже стихийно сформировался (в главных чертах) и был практически освоен математиками сравнительно "богатый" аппарат логического вывода классической математики - аппарат, фактически включавший в себя (в частности) те средства логического вывода, которые в дальнейшем были уточнены и систематизированы в форме классического исчисления высказываний. В истории конструктивной математической логики вскоре после упомянутого выше основополагающего шага Брауэра произошло следующее. "Подсказанные" дедуктивным аппаратом классической математической логики интуитивные представления о некоем "сводимостном" смысле логических связок $\longrightarrow$ и $\neg$ (см.§ 3), а также традиционные для классической математики представления о смысле логических связок $\&$ и $\forall$, подверглись корректированию (также лишь на уровне интуитивных представлений) с учетом наличия в некоторых формулах используемого языка логических связок $\exists$ и $\vee$, явно связанных с конструктивными задачами (например, было "забраковано" имеющееся в классическом исчислении высказываний правило вывода, разрешающее переход от формулы вида $\neg\neg P$ к P), и на основе такого скорректированного (но фактически оставшегося весьма "расплавчатым") понимания логических связок были построены некоторые логические и логико-арифметические исчисления (см. [7] , [9] , [10]), согласующиеся, по мнению их авторов, с соответствующими интуитивными представлениями. Уточняющую семантическую идею содержала предложенная А.Н.Колмогоровым в [11] интерпретация логических формул как описаний определённых типов задач. В этой же работе было показано, что всякая формула, выводимая в интуиционистском исчислении высказываний (это исчисление к тому времени получило некоторое признание), описывает тип разрешимых задач - таким образом, упомянутое исчисление допустимо с точки зрения предложенной семантики.

После того, как математика обогатилась точным понятием алгорифма, появилась реальная возможность для существенных уточнений ранее сложившихся семантических представлений, касающихся арифметических языков. Один из принципиальных итогов этого нового этапа составляют два семантических принципа С.К. Клини, выражающих конструктивное понимание определенных сочетаний квантора $\exists$ с некоторыми другими логическими связками. На языке $\mathcal{L}^{con}$ эти два принципа можно записать следующим образом:

$$\forall x \exists y P \longleftrightarrow \exists z \forall x (\exists u T_1(z,x,u) \,\&\, \forall u (T_1(z,x,u) \rightarrow \llcorner P \downarrow^{y}_{\gamma(u)} \lrcorner)), \quad (K_1)$$

$$(Q \to \exists y P) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \exists z (Q \to (\exists u T_1(z,0,u) \,\&\, \forall u (T_1(z,0,u) \to \llcorner P\,{}^{\circ y}_{\downarrow \nu(u)} \lrcorner))); \qquad (K_2)$$

здесь P и Q – любые формулы языка $\mathcal{L}^{cl}$, а z и u – переменные, не входящие в P и Q. Для пояснения (K_1) и (K_2) заметим *), что, во-первых, формула $\exists u T_1(z,x,u)$ означает «процесс вычисления значения рекурсивной функции $\{z\}_1$ в точке x заканчивается», и, во-вторых, если z, x и u таковы, что $T_1(z,x,u)$, то число $\nu(u)$ является значением функции $\{z\}_1$ в точке x. Используя принцип конструктивного подбора (см. § 2), мы можем заменить в (K_1) и (K_2) кванторный комплекс $\exists u$ выражением $\dot{\exists} u$ и в результате придём к вариантам семантических принципов С.К.Клини, имеющим вид

$$\forall x \exists y P \longleftrightarrow \exists z R_1, \qquad (K_1^\circ)$$

$$(Q \to \exists y P) \longleftrightarrow \exists z R_2, \qquad (K_2^\circ)$$

где R_1 и R_2 – формулы языка $\mathcal{L}^{cl}$ (последнее весьма существенно!).

Принцип (K_1) был сформулирован С.К.Клини в работе [24] в виде Тезиса III. Принцип (K_2) в з а в у а л и р о в а н н о м в и д е фигурирует в предложенной С.К.Клини конструктивной интерпретации арифметических суждений на основе введённого им же отношения «натуральное число e реализует арифметическую формулу F». Истолкованием суждения F считается суждение «F реализуемо» (подробнее: «потенциально осуществимо e такое, что e реализует F»). Эта семантика языка $\mathcal{L}^{con}$ такова, что суждение, предлагаемое в качестве разъяснения данного арифметического суждения F, также является арифметическим суждением и при том определении отношения «e реализует F», которое фактически было предложено в [25] (см. § 5 и уточнения в § 12) и было повторено в

---

*) В (K_2) выражение $T_1(z,0,u)$ можно заменить выражением $T_0(z,u)$.

§ 82 книги [3] (см.также [26] , стр.158), всегда сложнее (во всяком случае, по своей логической структуре ничем не проще) суждения F . Соответствующий критический анализ см. в [27] и [28] . Такая ситуация получается в результате постулирования определённой точки зрения, состоящей в том, что к а ж д о е арифметическое суждение (даже атомарное!) рассматривается как утверждение о разрешимости некоторой конструктивной задачи.

Автор этого обзора предложил (см. [27] или [28]) изменить исходную точку зрения на следующую: конструктивные задачи связываются (в таком смысле, как в теории реализуемости) л и ш ь с н е к о т о р ы м и арифметическими суждениями. При новой точке зрения конструктивные задачи не связываются с формулами языка $\mathcal{L}^{cl}$ и с теми формулами языка $\mathcal{L}^{con}$, которые хотя и содержат знак $\exists$ или знак $\vee$, но редуцируются посредством допустимых эквивалентностей (см.ниже) в некоторую формулу языка $\mathcal{L}^{cl}$. При этой точке зрения отпадает необходимость во введении отношения «e реализует F» . Вместо этого отношения в [27] и [28] был предложен а л г о р и ф м в ы я в л е н и я к о н с т р у к т и в н о й з а д а ч и[ж)]. Шаги применения этого алгорифма к заданной формуле F языка $\mathcal{L}^{con}$ представляют собой замены определенных подформул эквивалентными (с точки зрения некоторых интуитивных представлений) формулами, с таким расчетом, чтобы вхождения логической связки $\exists$ постепенно "извлекались наружу" или "погашались" (при этом логическая связка $\vee$ выражается, в соответствии с определением, через $\exists$). Некоторые из используемых эквивалентностей "подсказаны" давно сложившейся и получившей признание (на основе соображений интуитивного характера) частью современного дедуктивного ап-

---

[ж)] Этот алгорифм сформулирован в [27] и [28] применительно к языкам, отличающимся от $\mathcal{L}^{con}$ некоторыми деталями технического характера. Поэтому и дальнейшие пояснения отличаются некоторыми деталями технического характера от содержания [27] и [28] , но они и в деталях согласуются с содержанием статьи [22] - в ней можно найти подробное описание алгорифма выявления конструктивной задачи для языка $\mathcal{L}^{con}$.

парата конструктивной арифметики – здесь имеется в виду логико-арифметическое исчисление, слагающееся из исчисления примитивно-рекурсивных равенств (называемого иногда примитивно-рекурсивной арифметикой – см. [6]), всех постулатов традиционного конструктивного (в другой терминологии – интуиционистского) исчисления предикатов (см., например, [30]), написанных применительно к формулам языка $\mathcal{L}^{con}$, и постулата, выражающего принцип полной индукции. Примерами таких эквивалентностей могут служить:

$$(\exists x P \& Q) \leftrightarrow \exists x (P \& Q), \qquad (Q \& \exists x P) \leftrightarrow \exists x (Q \& P),$$
$$(\exists x P \to Q) \leftrightarrow \forall x (P \to Q), \qquad \neg \exists x P \leftrightarrow \forall x \neg P,$$
$$\exists x P \leftrightarrow \exists z \llcorner P \S^{x}_{z} \lrcorner \quad , \qquad \exists x \exists y P \leftrightarrow \exists z \llcorner P \S^{x\;,\;y}_{\varkappa_1(z), \varkappa_2(z)} \lrcorner ;$$

здесь x и y обозначают различные переменные и предполагается, что x не входит свободно в Q и z не входит в P .

Существенно новые эквивалентности внесли в конструктивную математику два сформулированных выше семантических принципа С.К.Клини [они используются в алгорифме выявления конструктивной задачи в вариантах (K_1°) и (K_2°)] *), а также принцип конструктивного подбора А.А.Маркова (см.§ 2). Присоединяя эти эквивалентности к упомянутому выше "старому" аппарату логического вывода конструктивной арифметики, мы получаем дедуктивный аппарат (назовем его исчислением $\mathcal{C}^{con}$) **), обладающий следующим весьма су-

---

*) Выделение "в явном виде" второго семантического принципа С.К.Клини из теории реализуемости было осуществлено при определении алгорифма выявления конструктивной задачи (см. подстрочное примечание * на стр.162), однако в [27] этот принцип был сформулирован не в виде схемы формул, описывающей эквивалентности с определенной структурой левой и правой частей, а в виде описания допустимого шага алгорифма. В виде описания типа эквивалентностей (доказуемых при семантике, определяемой на основе упомянутого алгорифма) этот принцип (говоря точнее – некоторое обобщение этого принципа) фигурирует в утверждении 2.4.2 из [29] .

**) $\mathcal{C}^{con}$ представляет собой консервативное расширение исчисление $\mathcal{C}^{cl}$ (см.§ 2).

щественным свойством: какова бы ни была формула F языка $\mathcal{L}^{con}$, можно, используя некоторые эквивалентности, выводимые в исчислении $\mathcal{C}^{con}$, преобразовать F посредством последовательных замен подформул эквивалентными формулами в некоторую формулу G, представляющую собой или формулу языка $\mathcal{L}^{cl}$ [даже формулу вида (Δ)], или формулу вида $\exists x P$, где P – формула языка $\mathcal{L}^{cl}$ [даже формула вида (Δ)].

Приведем пример такого преобразования формулы языка $\mathcal{L}^{con}$. Пусть F – формула вида

$$(\exists x_0(\exists x_1 P_1(x_0,x_1) \& \neg\exists x_2 P_2(x_0,x_2)) \to \forall x_3(P_3(x_3) \vee \neg P_3(x_3))),$$

где $P_1(x_0,x_1), P_2(x_0,x_2)$ и $P_3(x_3)$ – формулы языка $\mathcal{L}^{cl}$ (в скобках перечислены переменные, входящие свободно в соответствующую формулу). Выражая логическую связку $\vee$ через основные логические связки языка $\mathcal{L}^{con}$ и используя подходящие эквивалентности (выбираемые среди эквивалентностей перечисленных выше видов), мы последовательно получим следующие формулы [ж)]:

$$(\exists x_0 \exists x_1 Q(x_0,x_1) \to \forall x_3 \exists y R_1(y,x_3)),$$

$$(\exists z Q_2(z) \to \exists u R_2(u)), \quad \forall z(Q_2(z) \to \exists u R_2(u)),$$

$$\forall z \exists v R_3(z,v), \qquad \exists w R_4(w);$$

здесь использованы следующие обозначения:

$$Q_1(x_0,x_1) \leftrightharpoons (P_1(x_0,x_1) \& \forall x_2 \neg P_2(x_0,x_2)),$$

$$R_1(y,x_3) \leftrightharpoons (((y=0) \to P_3(x_3)) \& (\neg(y=0) \to \neg P_3(x_3))),$$

$$Q_2(z) \leftrightharpoons Q_1(\varkappa_1(z), \varkappa_2(z)),$$

$$R_2(u) \leftrightharpoons \forall x_3(\underset{\bullet}{\exists} \tau T_1(u,x_3,\tau) \& \forall \tau(T_1(u,x_3,\tau) \to R_1(\nu(\tau),x_3))),$$

$$R_3(z,v) \leftrightharpoons (Q_2(z) \to (\underset{\bullet}{\exists} s T_0(v,s) \& \forall s(T_0(v,s) \to R_2(\nu(s))))),$$

[ж)] Предполагается, что при построении этих формул переменные выбираются так, чтобы не возникали коллизии переменных.

$$R_4(w) \rightleftharpoons \forall z(\exists t T_1(w,z,t) \& \forall t(T_1(w,z,t) \to R_3(z,\nu(t)))).$$

Очевидно, что $R_4(w)$ представляет собой формулу языка $\mathcal{L}^{cl}$. Используя подходящие эквивалентности, выводимые в $\mathcal{C}^{cl}$, можно эту формулу преобразовать в формулу вида (Δ).

Пусть $\mathfrak{A}$ – алгорифм, преобразующий формулы языка $\mathcal{L}^{con}$ в формулы этого же языка. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ является а л г о р и ф м о м   в ы я в л е н и я   к о н с т р у к т и в н о й   з а д а ч и (а л г о р и ф м о м   к о н с т р у к т и в н о й   р а с ш и ф р о в к и   а р и ф м е т и ч е с к и х   ф о р м у л), если, какова бы ни была формула F языка $\mathcal{L}^{con}$, формула $\mathfrak{A}\llcorner F \lrcorner$ имеет вид $\exists x P$, где P – формула языка $\mathcal{L}^{cl}$ (кванторный комплекс $\exists x$ может отсутствовать), и в исчислении $\mathcal{C}^{con}$ выводима формула $(F \longleftrightarrow \mathfrak{A}\llcorner F \lrcorner)$.

Фиксируем один из алгорифмов выявления конструктивной задачи, выбрав его так, чтобы каждый результат его применения представлял собой или формулу вида (Δ), или формулу вида $\exists x P$, где P – формула вида (Δ), и обозначим выбранный алгорифм посредством $\mathfrak{T}$. Подробное описание конкретного алгорифма, подходящего на эту роль, дано в [22], § 4.

Из сказанного видно, что исчисление $\mathcal{C}^{con}$, сформированное на основе, вообще говоря, "расплывчатых" (но конструктивных по руководящей идее) интуитивных представлений семантического характера, может служить ориентиром для некоторого уточнения этих представлений (говоря словами М.Борна – для «постройки дороги позади себя»). Этот ориентир "подсказывает" следующую точку зрения: алгорифм $\mathfrak{T}$ рассматривается как с о в м е с т н о е   р е д у к ц и о н н о е   р а з ъ я с н е н и е   л о г и ч е с к и х   с в я з о к   я з ы к а $\mathcal{L}^{con}$ посредством формул вида (Δ) с использованием, если необходимо, в качестве начального шага основной семантической редукции Л.Э.Я.Брауэра, касающейся суждений вида $\exists x R$.

Если F – замкнутая формула (суждение) языка $\mathcal{L}^{con}$ и $\mathfrak{T}\llcorner F \lrcorner$ имеет вид $\exists x P$, то естественно считать, что F представляет собой утверждение о потенциальной разрешимости определённой конструктивной задачи, "зашифрованной" в формуле F, а именно, задачи о построении некоторого конструктивного объекта, арифметический код которого удовлетворяет условию P. В каждом случае, когда алгорифм $\mathfrak{N}$ "видит", что в рассматриваемом суждении "зашифрована" конструктивная задача, он дает формулировку требования к искомому конструктивному объекту.

В различных областях конструктивной математики систематически используются языки с подчинёнными переменными, поэтому уместно сказать об определении алгорифма выявления конструктивной задачи для формул таких языков и о возможности грубых ошибок при использовании "прямой" экстраполяции алгорифма $\mathfrak{N}$. Пусть $\mathcal{L}^{con,\sigma}$ – расширение языка $\mathcal{L}^{con}$, получаемое добавлением подчинённых переменных некоторого типа σ (мы ограничимся случаем, когда введены подчинённые переменные лишь одного типа), характеризуемого заданной формулой S языка $\mathcal{L}^{con}$. Тип σ характеризуется формулой S в том смысле, что допустимыми значениями любой подчинённой переменной типа σ считаются натуральные числа, удовлетворяющие условию S (предполагается, что лишь одна переменная входит в S свободно). Пусть $\mathfrak{U}$ – з а м к н у т а я формула языка $\mathcal{L}^{con,\sigma}$. Согласно определению (см. [27], § 8), процесс применения к $\mathfrak{U}$ алгорифма выявления конструктивной задачи начинается с полного исключения из $\mathfrak{U}$ всех подчинённых переменных, осуществляемого обычным для всей математической логики методом. После этого к полученной формуле языка $\mathcal{L}^{con}$ применяется алгорифм $\mathfrak{N}$. При "отмене" упомянутого начального этапа (то-есть при непосредственном применении $\mathfrak{N}$ к $\mathfrak{U}$, при котором подчинённые переменные не отличаются от "обычных") может получиться формула, не эквивалентная правильному результату (разнообразные примеры можно найти в [31]). Однако так может произойти лишь в том случае, когда в S действительно "зашифрована" некоторая конструктивная задача [ж)].

<u>Если</u> F – <u>замкнутая формула языка</u> $\mathcal{L}^{con}$, <u>выводимая в</u>

ж) Если $\mathfrak{N}\llcorner S \lrcorner$ – формула языка $\mathcal{L}^{cl}$, то оба пути приводят к эквивалентным результатам – см. [27], § 8.

исчислении $\mathcal{C}^{con}$, то по любому выводу этой формулы в $\mathcal{L}^{con}$ можно построить вывод формулы $\pi\llcorner F\lrcorner$ в исчислении $\mathcal{C}^{cl}$, если $\pi\llcorner F\lrcorner$ – формула языка $\mathcal{L}^{cl}$, и можно построить натуральное число N и вывод формулы $\llcorner P\,{}^{x}_{N}\lrcorner$ в исчислении $\mathcal{C}^{cl}$, если $\pi\llcorner F\lrcorner$ имеет вид $\exists x P$ (это утверждение представляет собой вариант одной теоремы А.В.Идельсона из [32], соответствующий рассматриваемым в этом обзоре языкам и исчислениям) *). Ниже речь будет идти о некоторых "приближенных" семантиках языка $\mathcal{L}^{cl}$ – таких семантиках, при которых исчисление $\mathcal{C}^{cl}$ приемлемо. Рассматривая переход от любой формулы F языка $\mathcal{L}^{con}$ к формуле $\pi\llcorner F\lrcorner$ как семантическую редукцию (как разъяснение понимания), мы на основании последней теоремы сможем сделать заключение о приемлемости исчисления $\mathcal{C}^{con}$ относительно суперпозиции "промежуточной" семантики, характеризуемой алгорифмом π, и любой из упомянутых "приближенных" семантик.

Достигаемое на основе алгорифма π разъяснение суждений языка $\mathcal{L}^{con}$ посредством суждений вида (Δ) [возможно с использованием основной семантической редукции Брауэра] рассматривается в излагаемой здесь семантической теории как "точное" разъяснение. Однако оно, вообще говоря, продвигает нас недостаточно далеко ввиду явного отказа интуиции, ограничивающей себя абстракцией потенциальной осуществимости,

*) Предшественником этой теоремы А.В.Идельсона п о х а р а к т е р у в о п р о с а, н а к о т о р ы й о н а о т в е ч а е т, можно считать теорему Д.Нельсона из [33] (см.также [3], § 82), утверждающую, что всякая формула языка конструктивной (интуиционистской) арифметики, выводимая средствами традиционного аппарата логического вывода этой арифметики, реализуема. Однако теория реализуемости, на которой основывался Д.Нельсон, не предусматривает сведения формул языка конструктивной арифметики к формулам вида $\exists x P$, где P – формула языка классической арифметики, и как в формулировке результата Д.Нельсона, так и в его обосновании, отсутствует какое-либо упоминание о формулах или аппарате логического вывода классической арифметики в контексте, похожем на теорему А.В.Идельсона.

от признания замкнутых формул вида (Δ) при $k \geqslant 1$ "непосредственно понятными" суждениями. Ввиду этого возникает проблема формулирования какого-то "разумного" разъяснения суждений вида (Δ). Так как суждения этого вида являются суждениями языка $\mathcal{L}^{cl}$, то можно апеллировать к ступенчатой семантике с дедуктивной импликацией, предусматривающей выражение отрицания через импликацию (об этой семантике, ее достоинствах, недостатках и возможностях "смягчения" последних шла речь в § 3). Однако такой путь представляется искусственным, если принимается точка зрения, согласно которой отрицание рассматривается (интуитивно) как логическая связка, "более простая", чем импликация, и поэтому преобразование какой-либо формулы языка $\mathcal{L}^{cl}$ в формулу вида (Δ) рассматривается как разъясняющий акт. Дальнейшее изложение ведется на основе именно такой точки зрения.

§ 5. Упомянутая выше теорема А.Тарского, вообще говоря, обрекает на неудачу поиски "точного" разъяснения суждений вида (Δ) посредством "непосредственно понятных" суждений. Если мы выдвинем требование "непосредственной понятности" разъяснений, то любой реалистичный подход к обсуждаемой проблеме должен предусматривать отказ от требования "точности" разъяснений и переход к построению иерархий приближенных разъяснений. Ниже речь будет идти об иерархиях, предложенных в [22] ж).

Естественно потребовать, чтобы в любой иерархии, предлагаемой с этой целью, определение каждой конкретной ступени состояло в задании некоторого алгорифма, строящего по любому суждению P рассматриваемого типа то суждение, которое считается приближенным разъяснением (на данной ступени иерархии) суждения P, и чтобы это приближенное разъяснение (обозначим его посредством Q) мажорировало суждение P при (частичном) упорядочении формул, "задаваемом" импликацией, то-есть, чтобы было осуществимо "интуитив-

---

ж) Существенные исправления, которые необходимо внести в статью [22], приведены в литературном указателе к настоящему обзору.

но приемлемое" обоснование суждения $(Q \longrightarrow P)$. Фактически речь будет идти о выводимости формулы $(Q \longrightarrow P)$ средствами того или иного аппарата логического вывода, признаваемого приемлемым на основе интуитивных представлений семантического характера (например, средствами исчисления $\mathfrak{C}^{con}$).

Пусть $\mathfrak{M}$ – алгорифм, определяющий некоторую ступень такой иерархии, и P – некоторое суждение вида (Δ). При выполнении второго требования суждение $\mathfrak{M} \llcorner P \lrcorner$ (суждение $\mathfrak{M} \llcorner \neg P \lrcorner$) можно рассматривать на интуитивном уровне как формулировку некоторого (вообще говоря, открытого для уточнений) достаточного условия "истинности" (соответственно, достаточного условия "ложности") суждения P , и это обстоятельство свидетельствует о предпочтительности с семантической точки зрения алгорифмов, удовлетворяющих второму требованию [ж].

ж) Предложенный К.Гёделем в [34] алгорифм интерпретации формул языка конструктивной арифметики посредством "непосредственно понятных" формул определенного языка, включающего в свою сигнатуру обозначения всевозможных примитивно-рекурсивных функционалов конечных типов, воспринимается иногда как алгорифм построения приближенных разъяснений, а некоторыми авторами – даже как алгорифм построения "точных" разъяснений. (Этот алгорифм "действует", вообще говоря, минуя язык классической арифметики, но применим, в частности, и к последнему). Однако преобразования, используемые в этом алгорифме, таковы, что мажорируемость, о которой выше шла речь, не гарантируется, если имеются в виду всевозможные суждения вида (Δ) [и тем более – всевозможные формулы языка $\mathcal{L}^{con}$]. К.Гёдель комментирует предложенную им интерпретацию следующим образом: «.... не утверждается, что определения 1 – 6 воспроизводят смысл введённых Брауэром и Гейтингом логических связок ». Явно указанное К.Гёделем назначение его алгорифма – новое доказательство непротиворечивости традиционных дедуктивных аппаратов классической арифметики и конструктивной арифметики – имеет не семантический, а метаматематический характер.

Ниже речь будет идти о "приближенных разъяснениях" суждений вида (Δ) посредством формул языка $\mathcal{L}^{\circ}$. В § 2 были приведены соображения, на основании которых такие формулы допустимо рассматривать как "непосредственно понятные". Фактически можно ограничиться получением "приближенных разъяснений", имеющих вид

$$\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_k \forall y_k \underset{\cdot}{\exists} z\, M \qquad (M \text{ – бескванторная формула}), \qquad (\Diamond)$$

так как с помощью эквивалентности (K_1°) и некоторых иных эквивалентностей, выводимых в $\mathcal{C}^{con}$, легко доказывается следующее утверждение:

(А) Если W – формула вида $(\Diamond)$, то $\mathfrak{N}\llcorner W \lrcorner$ – формула вида $\exists u \forall v \underset{\cdot}{\exists} w \tilde{M}$, где $\tilde{M}$ – бескванторная формула (то-есть $\mathfrak{N}\llcorner W \lrcorner$ представляет собой формулу языка $\mathcal{L}^{\circ}$).

При поисках формул вида $(\Diamond)$, мажорирующих заданную формулу вида (Δ), роль "наводящих соображений" играют некоторые эквивалентности и импликации, выводимые в исчислении $\mathcal{C}^{con}$. "Ключевую" роль играет следующее утверждение:

(Б) Если P, Q и R – формулы языка $\mathcal{L}^{cl}$, то в исчислении $\mathcal{C}^{con}$ выводима формула

$$(Q \underset{\cdot}{\vee} (\underset{\cdot}{\exists} u \forall v P \underset{\cdot}{\vee} R)) \leftrightarrow \exists u' \forall v' ((Q \underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} u \forall v P) \underset{\cdot}{\vee} (\llcorner P \downarrow^{u,\,v}_{u',\,v'} \lrcorner \underset{\cdot}{\vee} R)); \qquad (\square)$$

здесь u' и v' – различные переменные, не входящие в левую часть эквивалентности $(\square)$ [формулы Q и R могут отсутствовать].*)

Действительно, в исчислении $\mathcal{C}^{cl}$ (и, следовательно, в исчислении $\mathcal{C}^{con}$) выводима формула $\underset{\cdot}{\exists} u \forall v P \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow (\underset{\cdot}{\exists} u \forall v P \underset{\cdot}{\vee} \llcorner \forall v P \downarrow^{u}_{u'} \lrcorner)$, а из неё выводима формула

$$(Q \underset{\cdot}{\vee} (\underset{\cdot}{\exists} u \forall v P \underset{\cdot}{\vee} R)) \leftrightarrow \forall v' ((Q \underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} u \forall v P) \underset{\cdot}{\vee} (\llcorner P \downarrow^{u,\,v}_{u',\,v'} \lrcorner \underset{\cdot}{\vee} R)).$$

Ввиду того, что переменная u' не входит свободно в левую часть последней эквивалентности, в исчислении $\mathcal{C}^{con}$ допустѝм

---

*) При применениях эквивалентности $(\square)$ весьма существенно, что в ней переменная u' связывается квантором потенциальной осуществимости $\exists$, а не классическим квантором существования $\underset{\cdot}{\exists}$. Формула, получаемая из $(\square)$ заменой знака $\exists$ знаком $\underset{\cdot}{\exists}$, тоже выводима, но для наших целей бесполезна.

переход к формуле $(\square)$.

Способ использования утверждения (Б) для построения мажорант формул вида (Δ) поясняется ниже на примере формулы H, имеющей вид

$$\dot{\exists} u_1 \forall v_1 \dot{\exists} u_2 \forall v_2 \dot{\exists} w\,(f(u_1, v_1, u_2, v_2, w) = 0),$$

где f – примитивно-рекурсивная функция. Для упрощения записей введём следующие обозначения:

$$G(u_1, v_1, u_2, v_2, w) \leftrightharpoons (f(u_1, v_1, u_2, v_2, w) = 0),$$

$$H'(u_1, v_1) \leftrightharpoons \dot{\exists} u_2 \forall v_2 \dot{\exists} w\, G(u_1, v_1, u_2, v_2, w).$$

Применив последовательно два раза утверждение (Б), мы получим следующие выводимые в $\mathcal{C}^{con}$ эквивалентности:

$$H \longleftrightarrow \exists u_1' \forall v_1' (H \dot{\vee} H'(u_1', v_1')),$$

$$H \longleftrightarrow \exists u_1' \forall v_1' \exists u_2' \forall v_2' ((H \dot{\vee} H'(u_1', v_1')) \dot{\vee} \dot{\exists} w\, G(u_1', v_1', u_2', v_2', w)).$$

Правую часть последней эквивалентности мы назовем к в а з и р а з ъ я с н е н и е м р а н г а 0 ф о р м у л ы H. Это квазиразъяснение [ж)] сложнее (по своей структуре) формулы H, однако "вычеркнув" в нём подформулу $(H \dot{\vee} H'(u_1', v_1'))$, мы получим формулу

$$\exists u_1' \forall v_1' \exists u_2' \forall v_2' \dot{\exists} w\, G(u_1', v_1', u_2', v_2', w)$$

вида $(\diamond)$, мажорирующую формулу H. Эту формулу мы назовем м а ж о р а н т о й р а н г а 0 (а также т р и в и а л ь н о й м а ж о р а н т о й) ф о р м у л ы H и обозначим посредством $\mathcal{M}^0 \llcorner H \lrcorner$.

Для построения квазиразъяснения ранга 1 формулы H мы прежде всего воспользуемся выводимостью в $\mathcal{C}^{con}$ эквивалентностей видов

[ж)] В этом обзоре термин «квазиразъяснение» применяется в ином смысле, чем в статье [22] (там этим термином называется не правая часть последней эквивалентности, а сама эта эквивалентность).

$(\underset{\cdot}{\exists} u \forall v P \underset{\cdot}{\vee} R) \longleftrightarrow \underset{\cdot}{\exists} u \forall v (P \underset{\cdot}{\vee} R)$ [здесь u и v не входят свободно в R],

$(\underset{\cdot}{\exists} u \forall v P \underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} u \forall v Q) \longleftrightarrow \underset{\cdot}{\exists} u \forall v (\llcorner P \overset{v}{\underset{\varkappa_1(v)}{\updownarrow}} \lrcorner \underset{\cdot}{\vee} \llcorner Q \overset{v}{\underset{\varkappa_2(v)}{\updownarrow}} \lrcorner)$

и преобразуем входящую в квазиразъяснение ранга 0 формулу $(H \underset{\cdot}{\vee} H'(u_1', v_1'))$ в формулу

$$\underset{\cdot}{\exists} u_1 \forall v_1 \underset{\cdot}{\exists} u_2 \forall v_2 \underset{\cdot}{\exists} w (G(u_1, v_1, u_2, \varkappa_1(v_2), w) \underset{\cdot}{\vee} G(u_1', v_1', u_2, \varkappa_2(v_2), w)),$$

имеющую вид (Δ). Эту формулу обозначим посредством $H_1(u_1', v_1')$ и введем еще следующие обозначения:

$$G_1(u_1', v_1', u_1, v_1, u_2, v_2, w) \leftrightharpoons (G(u_1, v_1, u_2, \varkappa_1(v_2), w) \underset{\cdot}{\vee} G(u_1', v_1', u_2, \varkappa_2(v_2), w)),$$

$$H_1'(u_1', v_1', u_1, v_1) \leftrightharpoons \underset{\cdot}{\exists} u_2 \forall v_2 \underset{\cdot}{\exists} w G_1(u_1', v_1', u_1, v_1, u_2, v_2, w).$$

Из сказанного выше следует, что в $\mathfrak{C}^{con}$ выводима эквивалентность

$$H \longleftrightarrow \exists u_1' \forall v_1' \exists u_2' \forall v_2' (H_1(u_1', v_1') \underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} w G(u_1', v_1', u_2', v_2', w)).$$

Применив последовательно два раза утверждение (Б), мы получим выводимую в том же исчислении эквивалентность

$$H \longleftrightarrow \exists u_1' \forall v_1' \exists u_2' \forall v_2' \exists u_1'' \forall v_1'' \exists u_2'' \forall v_2'' ((H_1(u_1', v_1') \underset{\cdot}{\vee}$$

$$\underset{\cdot}{\vee} H_1'(u_1', v_1', u_1'', v_1'')) \underset{\cdot}{\vee} (\underset{\cdot}{\exists} w G_1(u_1', v_1', u_1'', v_1'', u_2'', v_2'') \underset{\cdot}{\vee}$$

$$\underset{\cdot}{\vee} \exists w G(u_1', v_1', u_2', v_2', w)).$$

Правую часть последней эквивалентности мы назовем к в а з и р а з ъ я с н е н и е м   р а н г а 1 ф о р м у л ы H. "Вычеркнув" в ней подформулу $(H_1(u_1', v_1') \underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\vee} H_1'(u_1', v_1', u_1'', v_1''))$, мы получим (после вынесения за скобки кванторного комплекса $\underset{\cdot}{\exists} w$) формулу

$$\exists u_1' \forall v_1' \exists u_2' \forall v_2' \exists u_1'' \forall v_1'' \exists u_2'' \forall v_2'' \underset{\cdot}{\exists} w (G_1(u_1', v_1', u_1'', v_1'', u_2'', v_2'', w) \underset{\cdot}{\vee}$$

$\vee G(u_1', v_1', u_2', v_2', w))$,

имеющую вид $(\Diamond)$, мажорирующую формулу H и мажорируемую формулой $\mathcal{M}^0 \llcorner H \lrcorner$. Полученную формулу назовем мажорантой ранга 1 формулы H и обозначим посредством $\mathcal{M}^1 \llcorner H \lrcorner$.

Для любого натурального числа n мы можем, продолжив процесс по указанному образцу, построить квазиразъяснение ранга n и мажоранту ранга n формулы H.[ж)] Эту мажоранту обозначим посредством $\mathcal{M}^n \llcorner H \lrcorner$ и выражение $\mathcal{M}^n$ будем использовать в качестве обозначения алгорифма, строящего мажоранты ранга n. В исчислении $\mathcal{C}^{con}$ выводимы импликации

$$\mathcal{M}^n \llcorner H \lrcorner \to H, \quad \mathcal{M}^n \llcorner H \lrcorner \to \mathcal{M}^{n+1} \llcorner H \lrcorner .$$

С помощью эквивалентности (K_1^0) способу построения квазиразъяснений и мажорант можно придать форму, приспособленную для распространения на первый бесконечный ординал ω и на дальнейшие конструктивные ординалы. Квазиразъяснение ранга n можно преобразовать в формулу вида

ж) Имеется определенная аналогия между этим способом последовательного построения квазиразъяснений и мажорант формул – с одной стороны, и некоторыми идеями Ж.Эрбрана, касающимися классического исчисления предикатов с функциональными константами – с другой стороны. Здесь имеются в виду не те широко освещённые в литературе идеи, которые приводят к знаменитой теореме Ж.Эрбрана о критерии выводимости формулы в классическом исчислении предикатов, а те идеи, которые можно найти в [36], разд.3, и в [35], гл.5, разд.2.2 и 2.3. В частности, эквивалентность $(\square)$ можно рассматривать как аналог в **конструктивной** арифметике "ключевой" для идей Ж.Эрбрана эквивалентности – аналог, приспособленный к нашим целям и основанный на определённых возможностях, предоставляемых исчислением $\mathcal{C}^{con}$. Более подробные пояснения см. в [22], разд.5.2, замечание 2.

$$\exists u \forall v((\underset{\cdot}{\exists} u_1 \forall v_1 \underset{\cdot}{\exists} u_2 \forall v_2 \underset{\cdot}{\exists} w(\mathfrak{A}^n[f](u,v,u_1,v_1,u_2,v_2,w)=0) \underset{\cdot}{\vee}$$

$$\underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} w(\mathfrak{B}^n[f](u,v,w)=0)) \,\&\, \underset{\cdot}{\exists} w(\varphi^n(u,v,w)=0)),$$

где $\mathfrak{A}^n$ и $\mathfrak{B}^n$ – некоторые рекурсивные операторы и φ^n – некоторая примитивно-рекурсивная функция. Последнюю формулу можно преобразовать в формулу вида

$$\exists u \forall v((\underset{\cdot}{\exists} u_1 \forall v_1 \underset{\cdot}{\exists} u_2 \forall v_2 \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\mathfrak{A}}[f](n,u,v,u_1,v_1,u_2,v_2,w)=0) \underset{\cdot}{\vee}$$

$$\underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\mathfrak{B}}[f](n,u,v,w)=0)) \,\&\, \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\varphi}(n,u,v,w)=0)),$$

где $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}$ – некоторые рекурсивные операторы и $\widetilde{\varphi}$ – некоторая примитивно-рекурсивная функция. Ввиду того, что при любом n такая формула эквивалентна формуле H, допустим переход к эквивалентности

$$H \leftrightarrow \exists z \exists u \forall v((\underset{\cdot}{\exists} u_1 \forall v_1 \underset{\cdot}{\exists} u_2 \forall v_2 \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\mathfrak{A}}[f](z,u,v,u_1,v_1,u_2,v_2,w)=0) \underset{\cdot}{\vee}$$

$$\underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\mathfrak{B}}[f](z,u,v,w)=0)) \,\&\, \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\varphi}(z,u,v,w)=0)).$$

Наконец, "склеивая" цепочку $\exists z \exists u$ в один кванторный комплекс $\exists u$, приходим к эквивалентности

$$H \leftrightarrow \exists u \forall v((\underset{\cdot}{\exists} u_1 \forall v_1 \underset{\cdot}{\exists} u_2 \forall v_2 \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\mathfrak{A}}[f](\varkappa_1(u),\varkappa_2(u),v,u_1,v_1,u_2,v_2,w)=0) \underset{\cdot}{\vee}$$

$$\underset{\cdot}{\vee} \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\mathfrak{B}}[f](\varkappa_1(u),\varkappa_2(u),v,w)=0)) \,\&\, \underset{\cdot}{\exists} w(\widetilde{\varphi}(\varkappa_1(u),\varkappa_2(u),v,w)=0)).$$

Правую часть этой эквивалентности назовем к в а з и - р а з ъ я с н е н и е м р а н г а ω ф о р м у л ы H, а формулу

$$\exists u \forall v \underset{\cdot}{\exists} w((\widetilde{\mathfrak{B}}[f](\varkappa_1(u),\varkappa_2(u),v,\varkappa_1(w))=0) \,\&$$

$$\& (\widetilde{\varphi}(\varkappa_1(u),\varkappa_2(u),v,\varkappa_2(w))=0)$$

назовем **мажорантой ранга** ω **формулы** H и обозначим посредством $\mathcal{M}^{\omega}\llcorner H \lrcorner$.

Известные из литературы методы определения алгорифмов посредством ординальной рекурсии дают возможность экстраполировать изложенный выше подход на конкретные "понятно определенные" шкалы конструктивных ординалов и определить для любого ординала α из выбранной шкалы и любой формулы G вида $\dot\exists u_1 \forall v_1 \ldots \dot\exists u_k \forall v_k \dot\exists w\, M$, где M – бескванторная формула, **квазиразъяснение и мажоранту ранга** α **формулы** G. (Подробности см. в [22] с учетом исправлений в литературном указателе к настоящему обзору). Алгорифм построения мажорант ранга α обозначим посредством $\mathcal{M}^{\alpha}$. Мажоранты формулы G, представимые в виде $\mathcal{M}^{\alpha}\llcorner G \lrcorner$, где α – ординал из выбранной шкалы, образуют некоторую иерархию приближенных разъяснений формулы G – иерархию, в которой любая ступень "уточняется" каждой следующей за ней ступенью.

На всевозможные формулы языка $\mathcal{L}^{con}$ (в частности, на всевозможные формулы языка $\mathcal{L}^{cl}$) алгорифм $\mathcal{M}^{\alpha}$ распространяется следующим образом. Пусть F – произвольная формула языка $\mathcal{L}^{con}$. Сначала к F применяется алгорифм выявления конструктивной задачи π. Формула $\pi\llcorner F \lrcorner$ имеет вид $\exists x \forall y\, G$, где G – формула вида $\dot\exists u_1 \forall v_1 \ldots \dot\exists u_k \forall v_k \dot\exists w M$ (здесь $k \geqslant 0$, M – бескванторная формула, кванторные комплексы $\exists x$, $\forall y$ и $\dot\exists w$ могут отсутствовать). Если $k=0$, то, по определению, $\mathcal{M}^{\alpha}\llcorner F \lrcorner$ совпадает с $\pi\llcorner F \lrcorner$; если же $k \geqslant 1$, то, по определению, $\mathcal{M}^{\alpha}\llcorner F \lrcorner$ представляет собой формулу $\pi\llcorner \exists x \forall y\, G^{\alpha} \lrcorner$, где $G^{\alpha} \rightleftharpoons \mathcal{M}^{\alpha}\llcorner F \lrcorner$. Во всех случаях $\mathcal{M}^{\alpha}\llcorner F \lrcorner$ является формулой языка $\mathcal{L}^{o}$.[ж)]

Для формулы $\exists x \forall y \dot\exists w (f(x,y,w)=0)$ языка $\mathcal{L}^{o}$ можно в свою очередь строить иерархии мажорант вида $\exists x \exists z \forall y (f(x,y,\varphi(z,y))=0)$, где φ – полная двухместная рекурсив-

---

ж) При рассмотрении этого определения необходимо иметь в виду, что алгорифм π не изменяет формул вида (Δ) и вида $\exists x P$, где P – формула вида (Δ); в частности, $\pi\llcorner\pi\llcorner F\lrcorner\lrcorner \mathrel{\underline{\underline{\circ}}} \pi\llcorner F \lrcorner$ для любой формулы F языка $\mathcal{L}^{con}$

ная функция, рассматриваемая как универсальная функция для определённого перечислимого класса полных одноместных рекурсивных функций (в любой такой иерархии выбор функции φ выделяет определённую ступень). Наконец, для суждений вида $\forall y(\psi(y)=0)$, где ψ - функция из того или иного класса полных рекурсивных функций (к такому виду приводимы, в частности, суждения вида $\forall y(f(m,y,\varphi(n,y))=0)$, где m и n - натуральные числа), можно строить такие иерархии достаточных условий истинности, в которых каждая ступень задана в виде конкретного исчисления бескванторных формул, удовлетворяющего требованию семантической приемлемости, то-есть в виде исчисления, для которого осуществимо содержательное рассуждение, "убедительно показывающее", что любая выводимая в рассматриваемом исчислении бескванторная формула верна при всех значениях входящих в неё переменных. Объединяя сказанное выше, можно формировать мажоранты суждений языка $\mathcal{L}^{con}$, вводимые в рассмотрение определениями синтаксического характера.

С интуитивной точки зрения желательно, чтобы иерархия приближенных разъяснений удовлетворяла еще одному условию, а именно, чтобы она обеспечивала возможность "сколь угодно точных" аппроксимаций любого суждения вида (Δ). Возникает вопрос: реалистично ли такое требование? Оставляя в стороне вопрос о выборе "меры отклонения" арифметических суждений друг от друга, заметим, что при рассмотрении этого вопроса, повидимому, неизбежно обращение к "полной шкале" конструктивных ординалов (конструктивных порядковых чисел), как к характеристике типа упорядочения ступеней желаемой иерархии. Однако общее понятие конструктивного ординала вводится в рассмотрение посредством обобщенного индуктивного определения, и при "расшифровке" этого определения существенным образом используются интуиционистские представления о свободно становящихся последовательностях конструктивных объектов. Ввиду этого сформулированная выше цель представляется нереалистичной с точки зрения такого восприятия оснований математики, при котором представления о свободно становящихся последовательностях квалифицируются как абстрактные идеи, не обладающие достаточной отчетливостью и неприемлемые поэтому в качестве объектов математических рассмотрений.

Отказ от использования "напрашивающегося" обобщенного индуктивного определения в этой ситуации (так же, как и в иных похожих ситуациях – см., в частности, [37]) лишает нас возможности достичь "полной замкнутости" рассматриваемой теории и этим, быть может, наносит ущерб эстетическому чувству математика. Однако такой отказ (ради поддержания "уровня наглядной понятности" используемых определений) не лишает нас возможности строить основные разделы конструктивной математики на отчетливой семантической базе, так как для этой цели "практически достаточны" приближенные разъяснения суждений, определяемые на основе некоторых "начальных шкал" конструктивных ординалов.

К такой точке зрения автор этого обзора пришел в результате анализа некоторых теорем из различных разделов теории рекурсивных функций и конструктивного математического анализа. Для рассмотренных автором теорем удавалось строить истинные мажоранты требуемого вида. Изложенную точку зрения существенным образом подкрепляет следующая теорема, являющаяся комбинацией одной теоремы Г.Е.Минца из [38] и упомянутой выше теоремы А.В.Идельсона. <u>По любому выводу суждения F в исчислении $\mathcal{C}^{con}$ можно построить конструктивный ординал β, меньший чем ε_0 и такой, что истинно суждение $\mathcal{M}^{\beta}\llcorner F \lrcorner$; при этом, если в выводе не используется правило полной индукции, то можно построить конечный ординал (натуральное число) β, обладающий указанным свойством.</u> Если мы обратимся к таким разделам конструктивной математики, как общая теория алгорифмов и исчислений, конструктивный математический анализ, конструктивная топология и т.п., то увидим, что используемые здесь средства логического вывода обычно не выходят (по существу) за рамки исчисления $\mathcal{C}^{con}$, и, таким образом, "практически достаточной" оказывается с п е ц и а л ь н а я с е м а н т и к а , определяемая алгорифмом мажорирования $\mathcal{M}^{\varepsilon_0}$, а во многих случаях достаточна специальная семантика, определяемая "более грубым" алгорифмом мажорирования $\mathcal{M}^{\omega_3}$ (здесь $\omega_3 \leftrightharpoons \omega^{\omega^{\omega}}$) или даже алгорифмом мажорирования $\mathcal{M}^{\omega}$.

Литература

1. Марков А.А. О непрерывности конструктивных функций. -- Успехи мат.наук, 1954, т.9, вып.3 (61), с.226-230.
2. Марков А.А. О конструктивной математике. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1962, вып.67, с.8-14.
3. Kleene S.C. Introduction to metamathematics. New York - Toronto, 1952. (Перев.на рус.яз.: Клини С.К. Введение в метаматематику. М., 1957).
4. Tarski A. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia Philosophica, 1935, B.1, S.261-405.
5. Smullyan R.M. Theory of formal systems. Princeton, N.J., 1963.(Перев.на рус.яз.: Смальян Р. Теория формальных систем. М., 1981).
6. Goodstein R.L. Recursive number theory. Amsterdam, 1957. (Перев.на рус.яз. в кн.: Гудстейн Р.Л. Рекурсивный математический анализ. М., 1970).
7. Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur. Мат.сб., 1925, т.32, № 4, с.646-667.
8. Wang H. Вступительные замечания к английскому переводу работы [7] в сборнике: Van Heijenoort J. (editor). From Frege to Gödel. Harvard univ.press, 1967, p.414-416.
9. Heyting A. Sur la logique intuitionniste. Bull.Acad.Sci. Belgique, 1930, v.16, p.957-963.
10. Heyting A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsber. Preuss.Acad.Wiss., phys.-math. Kl., 1930, S.42-56. - Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. Ibid., 1930, S.57-71, S.158-169.
11. Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik. Math.Zeitschr., 1932, B.35, №1, S.58-65.
12. Gentzen G. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math.Ann. 1936, B.112, №4, S.493-565.(Перев.на рус. яз. в сб. [40]).
13. Lorenzen P. Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin, Springer-Verlag, 1955.
14. Markov A.A. Essai de construction d'une logique de la mathématique constructive. Revue intern.philos., Bruxelles, 1971, v.98, №4, p.477-507. (Вариант на рус.яз. в сб.:

Исследования по теории алгорифмов и математической логике. Вычисл.центр АН СССР, I976, вып.2, с.3-3I).

I5. Марков А.А. О языке Я_0. Докл.АН СССР, I974, 2I4, № I, с.40-43.

I6. Марков А.А. О языке Я_1. Докл.АН СССР, I974, 2I4, № 2, с.279-282.

I7. Марков А.А. О языке Я_2. Докл.АН СССР, I974, 2I4, № 3, с.5I3-5I6.

I8. Марков А.А. О языке Я_3. Докл.АН СССР, I974, 2I4, № 4, с.765-768.

I9. Марков А.А. О языках $\text{Я}_4, \text{Я}_5, \ldots$. Докл.АН СССР, I974, 2I4, № 5, с.I03I-I034.

20. Марков А.А. О языке Я_ω. Докл.АН СССР, I974, 2I4, № 6, с.I262-I264.

2I. Шанин Н.А. К вопросу о конструктивном понимании опорных формул. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, I964, вып.72, с.348-379.

22. Шанин Н.А. Об иерархии способов понимания суждений в конструктивной математике. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, I973, вып.I29, с.203-266.

23. Kreisel G. On the interpretation of non-finitist proofs. I. Journ.Symb.Logic, 1951, v.16, p.241-267.

24. Kleene S.C. Recursive predicates and quantifiers. Trans. Amer.Math.Soc., 1943, v.53, p.41-73.

25. Kleene S.C. On the interpretation of intuitionistic number theory. Journ.Symb.Logic, 1945, v.10, №4, p.109-123.

26. Kleene S.C. Realizability and Shanin's algorithm for the constructive deciphering of mathematical sentences. Logique et analyse, 1960, №11-12, p.154-165.

27. Шанин Н.А. О конструктивном понимании математических суждений. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, I958, вып.52, с.226-3II.

28. Шанин Н.А. Об алгорифме конструктивной расшифровки математических суждений. Zeitschr.math.Logik Grundl.Math., 1958, B.4, S.293-303.

29. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, I962, вып.67, с.I5-294.

30. Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schliessen. Mathem.Zeitschr., 1934, B.39, S.176-210, S.405-431.

(Перев.на рус.яз. в сб. [40]).

31. Минц Г.Е. О предикатных и операторных вариантах построения теорий конструктивной математики. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1964, вып.72, с.383-436.

32. Идельсон А.В. Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными. - Тр.Мат.-ин-та АН СССР, 1964,вып.72, с.228-343. - Замечания об исчислениях конструктивной логики с подчиненными переменными и аксиомой полной индукции. Там же, 1967, вып.93, с.106-112.

33. Nelson D. Recursive functions and intuitionistic number theory. Trans.Amer.Math.Soc.,1947, v.61, №2, p.307-368.

34. Gödel K. Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica, 1958, v.12, №3/4, p.280-287. (Перев. на рус.яз. в сб. [40]).

35. Herbrand J. Recherches sur la théorie de la demonstration. Travaux Soc.Sci et Let.Varsovie, Cl.III, 1930, v.33.

36. Herbrand J. Sur le probléme fondamental de la logique mathématique. Comp.Rend.Soc.Sci.Varsovie, Cl.III, 1931, v.24, p.12-56.

37. Шанин Н.А. Об иерархии конструктивных функционалов Брауэра. - Зап.науч.семинаров ЛОМИ/Ленингр.отд-ние Матем.ин-та АН СССР, 1974, т.40, с.142-147.

38. Минц Г.Е. Трансфинитные развертки арифметических формул. - Зап.науч.семинаров ЛОМИ/Ленингр.отд-ние Матем.ин-та АН СССР, 1975, т.49, с.51-66.

39. Grattan-Guinness I. In memoriam Kurt Gödel: His 1931 correspondence with Zermelo on his incompletability theorem. Historia Mathematica, 1979, v.6, p.294-304.

40. Математическая теория логического вывода. Сб.перев. М., "Наука", 1967.

Примечание к [22] . В статью [22] необходимо внести следующие существенные исправления:

Стр.252, 4 строка сверху. Напечатано $(\mathfrak{F}^{0}_{m+2,n} \circ \mathfrak{F}^{\omega}_{a,i})$; должно быть $(\mathfrak{F}^{\omega}_{m+2,n,i} \circ \mathfrak{F}^{0}_{a})$.

Стр.256, 16 строка сверху. Напечатано $(\mathfrak{F}^{0}_{m+2,n} \circ \mathfrak{F}_{a,\beta})$; должно быть $(\mathfrak{F}_{m+2,n,\beta} \circ \mathfrak{F}^{0}_{a})$.

Аналогичные изменения необходимо внести в соответствующие определения из разд.6.3.