РАСШИРЯЮЩАЯСЯ КОНСТРУКТИВНАЯ ВСЕЛЕННАЯ

Ю.И.Манин

Москва, СССР

Приложения математики условно делятся на две большие области: математика может обеспечивать эффективную деятельность Человека в Мире или более глубокое понимание Человеком Мира. Гео-метрия начиналась как измерение-земли; она стала абстрактной математикой, превратившись в измерение-ничего, и вернулась к приложениям во втором смысле слова, став измерением-чего-угодно, например, "вероятности туннельного перехода между вакуумами с разным топологическим зарядом".

Строя эффективные алгоритмы, мы способствуем эффективной деятельности: технологии, навигации, управлению. Абстрактная теория вычислимости, как кажется сейчас, накладывает координатную сетку и очерчивает далекие границы возможного в этой области. Уровнем ниже лежат уже конкретные разработки.

Но не понимаем ли мы теорию вычислимости слишком узко? Не дает ли она "больше, чем просят", как всякая хорошая математика? Мы лишились бы огромных пластов естественно-научной культуры, включая квантовую механику, если бы считали, что мнимая единица вводится лишь для гибкости формализма, а волновое уравнение описывает лишь те волны, для описания которых оно было придумано.

Мне кажется, что теория вычислимости находится уже на той стадии зрелости, когда следует систематически искать расширенные интерпретации ее идей. Образцом такой деятельности являются работы А.Н.Колмогорова и его учеников, посвященные глубокому анализу проблемы случайности как всего, что не может быть выявлено при алгоритмическом взаимодействии с изучаемым объектом.

Менее исследован дополнительный аспект этой проблемы: модели детерминированности, доставляемые нам общей концепцией вычислительного процесса в любом из принятых вариантов.

В посленьютоновской физике основным выражением идеи детерминированности служит принцип, согласно которому эволюция изолированной системы определяется дифференциальными уравнениями ("законы природы") и начальными условиями. Представление об абстрактном вычислительном процессе во многом подобно этому принципу: "закон" определяется структурой вычислительного устройства, "начальные условия" - это входные данные, или программа. Разбиение вычислительного процесса на элементарные шаги естественно сопоставить с идеей дифференцирования. Но в классической математике континуума нет ничего хотя бы отдаленно подобного тезису Чёрча, позволяющего нам надеяться, что мы достаточно полно понимаем принципы описания детерминированности. С другой стороны, в теории вычислимости явно недостает версий таких фундаментальных идей, как принцип экстремального действия или сопряженные величины. (Все знают, что объем памяти можно экономить за счет времени работы и наоборот, но где точное выражение этой сопряженности?).

Одна из трудностей, мешающих плодотворно сопоставлять модели алгоритмической с моделями классической математики, связана с технической неразработанностью идеи "расширяющегося конструктивного универсума".

Поясню эту мысль подробнее. В теории вычислимости есть две крупные абстракции, легко поддающиеся теоретико-множественной интерпретации. Это понятие конструктивного универсума U и класса R_U всех частичных функций из U в U, которые полувычислимы алгоритмически (полувычислимость - это вычислимость на области определения). Стандартный пример: $U = N$, натуральные числа; $R_U = R$, частично-рекурсивные функции.

Пара, состоящая из множества и класса его частичных отображений в себя, есть структура в смысле Бурбаки. Две такие структуры изоморфны, если между множествами есть биекция, индуцирующая биекцию на выделенных классах отображений.

Тезис Чёрча (в расширенном варианте) утверждает, что любая пара (U, R_U) конструктивно изоморфна паре (N, R). Понятие конструктивного изоморфизма здесь не подлежит формализации, точно так же, как сам тезис Чёрча не подлежит доказательству.

Рабочим воплощением тезиса Чёрча служат, конечно, разнообразные нумерации Гёделя, которые позволяют кодировать числами тексты, машины Тьюринга, графы, вычислительные процессы и т.п.

В то же время есть тысяча причин не считать (N, R) или любую другую пару (U, R_U) единственным и окончательным универсумом. Один из основных мотивов состоит в том, что вычислительный процесс всегда является языковым актом, и мы всегда должны иметь возможность добавить к универсуму новое описание объекта (процесса, признака, ...), имевшегося в универсуме или даже нового. Как следует смотреть, скажем, на функцию $f: U \to U$, заданную своим определением неэффективно, что сплошь и рядом делается в классической математике? Предлагается считать "f" - описание f - объектом расширенного конструктивного универсума V. Если впоследствии обнаружится, что $f \in R_U$, то можно считать, что мы нашли полувычислимую функцию в V, принимающую значения $f(u)$ на парах $\langle "f", u\rangle \in V$. Но нас могут интересовать вовсе не значения функции f, заданной своим определением, а, скажем, ее интеграл от 0 до I, число нулей в единичном круге или даже гомотопический класс. Это означает, что конструктивный объект, замещающий f, вообще всегда следует считать потенциальным аргументом новой вычислимой функции в новом универсуме, а не просто символом старой. Поэтому мне кажутся неосновательными традиционные конструктивные переработки теорем классического анализа, исходящие из слишком буквального толкования их смысла.

Дух теории вычислимости определяется этой диалектикой иерархии расширяющихся универсумов, любой уровень которой изоморфен всем остальным.

Во многих отношениях эта иерархия подобна системе окрестностей точки в топологическом пространстве: каждый конструктивный универсум можно считать "конструктивной окрестностью пустого множества". Понятие оракула в теории сводимости естественно интерпретировать в том же духе, определив, скажем, конструктивную окрестность элемента $x \in P(N)$ как совокупность подмножеств N, рекурсивных относительно x. Структура, состоящая из множества, покрытого рекурсивными окрестностями своих элементов, могла бы служить любопытной моделью в пограничной области между классической и алгоритмической математикой.

Отмеченный выше языковый характер основных понятий теории вычислимости ясен с момента ее возникновения и побуждал к поискам лингвистических параллелей. Из разработок машинного перевода выкристаллизовалась одна из значительных общих концепций современной лингвистики: модель "Смысл ↔ Текст". В этой модели предметом лингвистики представляется соответствие между двумя бесконечными множествами - смыслов и текстов. Элементы первого множества - это тексты на искусственном семантическом языке, второго - на естественном языке. Лингвистика мыслится как теория алгоритмического перевода в обе стороны, осуществляемого через ряд промежуточных этапов, называемых уровнями представления естественного языка. Ни язык смыслов, ни алгоритмы переводов не являются данностями и подлежат синтезу. Предполагается, что как результаты традиционной лингвистики, так и концепции других направлений должны найти свое естественное место в реализации этой обширной программы.

Построение детализированной модели является настолько грандиозным предприятием, что побуждает к поискам как бы "модели$_2$ модели$_1$ Смысл - Текст", которая позволила бы увидеть существенные черты этого проекта in vitro. В частности, удобно выбрать такую ограниченную область смыслов, чтобы ее семантическое представление имело возможно более простую и заданную извне структуру. "Феномен деловой прозы" по А.П.Ершову представляется интереснейшим кандидатом.

Но можно удалиться от бытовой речи еще больше и рассмотреть в качестве области смыслов натуральные числа S с семантическим представлением последовательностями палочек I, II, III, ... Моделью естественного языка тогда будет некоторая система наименований целых чисел. Ее, однако, нельзя заимствовать из реального естественного языка. В самом деле, даже поверхностный анализ показывает, что естественные наименования целых чисел, за исключением начального отрезка, являются по существу именами имен, чаще всего десятичных записей, а не самих чисел. Если мы хотим избавиться от зависимости от явно экстраязыкового явления позиционной системы, нужно сделать еще один шаг в сторону абстракции и моделировать естественный язык также некоторым математическим объектом. Пусть это будет вычислимое отображение $f: N \to S$ (натуральные числа N - это универсум имен, а S - универсум смыслов). Я хочу показать, что неожиданные языковые свойства обнаруживает выбор в качестве f "асимптотически оптимальной нумерации" по Колмогорову. Согласно определению, f - это частично рекурсивная функция, позволяющая назвать натуральное число столь кратко, насколько это вообще возможно, с точностью до неизбежной неопределенности в ограниченное число бит. Оптимальная система наименований существует и обладает следующими свойствами:

а) у каждого целого числа есть бесконечно много имен;

б) не все числа являются именами: функция f не определена на бесконечном подмножестве N ;

в) восстановление числа по его имени требует работы сложного алгоритма: оптимальные функции строятся с помощью универсальных рекурсивных функций, которые в определенном смысле настолько сложны, насколько это вообще возможно;

г) задача отыскания по числу его кратчайшего имени алгоритмически неразрешима.

Этот список свойств оптимальной функции можно сопоставить со следующими свойствами естественного языка:

А) Обилием синонимии: каждый смысл может быть выражен огромным количеством текстов.

Б) Открытостью языка: на каждый момент времени не все грамматически правильные тексты осмыслены (в модели Смысл - Текст это качество отнесено к уровню семантического представления: проблема "осмысленности смысла" не обсуждается).

В) Перевод Текст→Смысл требует многоступенчатой работы системы сложных алгоритмов, выявляющих огромную структурированность языковых конструкций.

Г) Перевод Смысл→Текст еще гораздо более труден, и по существу эта проблема удовлетворительного решения не имеет.

Если принять, что модель оптимальной нумерации действительно имеет отношение к универсалиям естественных языков, это приводит к неожиданному выводу: характеристики А) - Г) являются хотя бы частично отражением экономичности языка, то есть его способности кратко выразить сложный смысл, если такое выражение вообще возможно. Обилие синонимии и бессмыслицы, на поверхностный взгляд противоречащее экономичности, оказывается ее необходимым следствием. Некоторое интуитивное объяснение открытости языка на уровне модели$_2$ снова доставляет концепция расширяющегося универсума. Можно доказать, что ограничив оптимальную нумерацию некоторого универсума на меньший универсум, мы снова получим оптимальную нумерацию. При этом высвободится бесконечно много имен для объектов, которые мы утратили. Обращая это рассуждение, мы приходим к выводу, что "пустые имена" - точки, где функция Колмогорова не определена,- являются потенциальными именами новых сущностей. Это так хорошо известно лингвистам и поэтам, что в дополнительных объяснениях могли бы нуждаться только математики.

Эти импрессионистические заметки - дань свободному стилю симпозиума. Их название заимствовано у физиков. Оно призвано не только служить метафорой основной мысли, но и напоминать, что мы живем в эпоху после Большого Взрыва вычислительной техники.

Я глубоко признателен А.П.Ершову, длительные обсуждения с которым помогли формированию концепции этого сообщения; Д.Кнуту, представившему вдохновляющие наблюдения над алгоритмическим стилем мышления; Ю.Д.Апресяну и В.А.Успенскому, которые побудили меня выступить перед лингвистами и попытаться уточнить неопределенные аналогии.